LIBRARY OF
WELLESLEY COLLEGE

PRESENTED BY

HELEN A. MERRILL '86

Helen A. Merrill
Wellesley College. 1905

Digitized by the Internet Archive
in 2012 with funding from
Boston Library Consortium Member Libraries

http://archive.org/details/questionirigaard00enri

Helen A. Merrill

Wellesley College

1905

Proprietà letteraria.

BOLOGNA: TIPI DELLA DITTA ZANICHELLI, 1900.

QUESTIONI

RIGUARDANTI

LA GEOMETRIA ELEMENTARE

TRATTATE DA

U. Amaldi, E. Baroni, R. Bonola, B. Calò,
G. Castelnuovo, A. Conti, E. Daniele, F. Enriques, A. Giacomini,
A. Guarducci, G. Vitali.

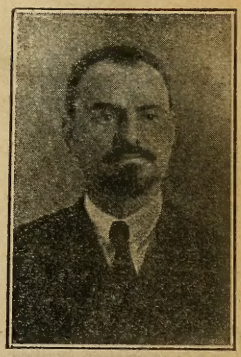
RACCOLTE E COORDINATE

DA

FEDERIGO ENRIQUES

PROFESSORE ALLA UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

CON 10 TAVOLE E 40 FIGURE



FEDERIGO ENRIQUES

BOLOGNA
DITTA NICOLA ZANICHELLI
1900.

DEC 1 0 1942

214576

Gift of
Helen A. Merrill, '86

MATH
QA
443
E52

INDICE

INTRODUZIONE . . . . . Pag. I-VII

ARTICOLO PRIMO

Sull' importanza scientifica e didattica delle questioni che si riferiscono ai principii della Geometria di FEDERIGO ENRIQUES a Bologna . . . . . » 1

I

§ 1. Le basi empiriche della Geometria . . . . . » 2
§ 2. L' intuizione geometrica . . . . . » 6
§ 3. Concetti e proposizioni fondamentali della Geometria. . . . » 8
§ 4. I principali indirizzi nelle ricerche relative ai principii della Geometria . . . . . » 15
§ 5. Il problema psicologico dell' acquisto delle nozioni spaziali. » 18
§ 6. Il problema filosofico della Geometria . . . . . » 20

II

§ 7. Sullo scopo dell' insegnamento secondario . . . . . » 23
§ 8. Sull' insegnamento della Geometria . . . . . » 25
§ 9. Le esigenze didattiche relative all' insegnamento dei principii della Geometria . . . . . » 28

ARTICOLO SECONDO

Sui concetti di retta e di piano di UGO AMALDI a Bologna . . » 34

§ 1. Varie definizioni della retta . . . . . » 34
§ 2. Varie definizioni del piano. . . . . » 37

§ 3. Sviluppi di Bólyai e Lobatschefskij . . . . . Pag. 39
§ 4. Postulati di appartenenza . . . . . » 50
§ 5. Il segmento . . . . . » 51
§ 6. L'angolo . . . . . » 55
§ 7. Il diedro . . . . . » 62

ARTICOLO TERZO

Della congruenza e del movimento di Alfredo Guarducci a Lodi. » 65
§ 1. Considerazioni generali . . . . . » 65
§ 2. Il sistema di postulati di Pasch . . . . . » 67
§ 3. Il sistema di Veronese . . . . . » 72
§ 4. Il sistema di Hilbert . . . . . » 74
§ 5. Principali proposizioni sulle perpendicolari . . . . . » 77
§ 6. Considerazioni didattiche comparative . . . . . » 81

ARTICOLO QUARTO

Sulle applicazioni del postulato della continuità nella Geometria elementare di Giuseppe Vitali a Pisa . . . . . » 83
§ 1. Il postulato della continuità . . . . . » 83
§ 2. Divisibilità del segmento e dell'angolo . . . . . » 89
§ 3. Proposizione d'Archimede . . . . . » 91
§ 4. Intersezioni di una retta con un circolo . . . . . » 92
§ 5. Intersezioni di due circoli . . . . . » 94
§ 6. Sulla teoria della misura . . . . . » 98

ARTICOLO QUINTO

Sulla teoria dell' equivalenza di Ugo Amaldi a Bologna . . . . » 103
§ 1. Considerazioni generali sulle grandezze geometriche . . . . » 103
§ 2. Equivalenza dei poligoni . . . . . » 105
§ 3. Sguardo storico alle dimostrazioni del principio del De Zolt. » 111
§ 4. Dimostrazione del Veronese del principio di De Zolt per i poligoni . . . . . » 115
§ 5. Prismi e poligoni sferici . . . . . » 121
§ 6. Il cerchio . . . . . » 123
§ 7. Le superficie piane e contorno qualsivoglia . . . . . » 127
§ 8. I poliedri . . . . . » 131
§ 9. Dimostrazione della proposizione del De Zolt pei poliedri. » 134
§ 10. Relazioni tra la teoria dell' equivalenza e il postulato di Archimede . . . . . » 138
§ 11. Osservazioni didattiche . . . . . » 141

ARTICOLO SESTO

Sulla teoria delle parallele e sulle Geometrie non euclidee di ROBERTO BONOLA a Bologna . . . . . Pag. 143

I

§ 1. I primi tentativi per la dimostrazione del postulato d'Euclide. » 144
§ 2. L' opera del Wallis . . . . . » 146
§ 3. L' opera del padre Saccheri . . . . . » 147
§ 4. L' opera di Lambert. . . . . » 150
§ 5. L' opera di Legendre . . . . . » 153
§ 6. Esposizione dei teoremi di Legendre. . . . . » 154
§ 7. Postulati equivalenti al postulato d' Euclide . . . . . » 159
§ 8. L' opera di Gauss . . . . . » 160
§ 9. L' opera dello Schweikart e del Taurinus . . . . . » 162
§ 10. I tre indirizzi moderni nelle ricerche sui fondamenti della Geometria . . . . . » 164
§ 11. L' opera di Lobatschefskij . . . . . » 165
§ 12. L' opera di Bólyai . . . . . » 166
§ 13. La Geometria sopra le superficie in rapporto colle teorie non euclidee. . . . . » 169
§ 14. Fondamenti d' una Geometria piana secondo le idee di Riemann. . . . . » 175
§ 15. Fondamenti d' una Geometria spaziale secondo Riemann . » 177
§ 16. L' opera di Helmholtz e le ricerche del Lie . . . . . » 179
§ 17. Subordinazione della Geometria euclidea alla proiettiva. . » 180
§ 18. Subordinazione delle Geometrie non euclidee alla Geometria proiettiva . . . . . » 182
§ 19. Rappresentazione delle Geometrie non euclidee sul piano ordinario. . . . . » 186
§ 20. Fondazione della Geometria partendo dai concetti grafici . » 189
§ 21. Sulla indimostrabilità del postulato d' Euclide . . . . . » 190

II

§ 22. Prime proposizioni elementari della Geometria. . . . . » 193
§ 23. Fondamenti di una teoria generale delle parallele. . . . . » 194

III

§ 24. Geometria iperbolica - Somma degli angoli d' un triangolo. » 202
§ 25. Aree. . . . . » 203

§ 26. Distanza dei punti di una retta arbitraria da una retta fissa. Pag. 204
§ 27. Angolo di parallelismo . . . . . » 209

IV

§ 28. Geometria ellittica - Proprietà fondamentali . . . . . » 212
§ 29. Perpendicolari - Polarità assoluta . . . . . » 214
§ 30. Angoli e segmenti associati - Loro misura . . . . . » 216
§ 31. Legge di dualità nel piano ellittico . . . . . » 217
§ 32. Proprietà fondamentali dei triangoli. . . . . » 220

ARTICOLO SETTIMO

Sui metodi elementari per la risoluzione dei problemi geometrici di Ettore Baroni a Prato . . . . . » 223

§ 1. Considerazioni preliminari. . . . . » 223
§ 2. Ricerca di luoghi geometrici. . . . . » 225
§ 3. Risoluzione di problemi determinati col metodo dei luoghi geometrici . . . . . » 226
§ 4. Metodo di similitudine. . . . . » 231
§ 5. Metodo di moltiplicazione. . . . . » 232
§ 6. Metodo del problema contrario. . . . . » 233
§ 7. Metodi di trasformazione . . . . . » 235
§ 8. Metodo di trasformazione per raggi vettori reciproci . . . » 235
§ 9. Traslazione parallela . . . . . » 237
§ 10. Ribaltamento intorno ad un asse . . . . . » 240
§ 11. Rotazione intorno ad un punto . . . . . » 241

ARTICOLO OTTAVO

Sulla risoluzione dei problemi geometrici col compasso di Ermenegildo Daniele a Torino . . . . . » 247

§ 1. Considerazioni preliminari . . . . . » 250
§ 2. Prime costruzioni . . . . . » 253
§ 3. I problemi fondamentali nel metodo di L. Mascheroni . . . » 258
§ 4. Risoluzione di alcuni problemi sui segmenti e sugli angoli. » 260
§ 5. Divisione della circonferenza in 3, 4, 5, 10 parti eguali. . » 266
§ 6. Problemi risolti per approssimazione: rettificazione della circonferenza, duplicazione del cubo . . . . . » 267

§ 7. Le trasformazioni per raggi vettori reciproci e le costruzioni col solo compasso: problemi fondamentali . . . . . Pag. 269
§ 8. Dimostrazione, mediante l' inversione, della risolubilità dei problemi elementari col solo compasso. . . . . » 274
§ 9. Cenno sull' applicazione dell' inversione alla risoluzione di alcuni problemi elementari . . . . . » 275

ARTICOLO NONO

Sulla risoluzione dei problemi geometrici cogli istrumenti elementari: contributo della Geometria proiettiva di Amedeo Giacomini a Pisa . . . . . » 279

§ 1. I problemi grafici di primo grado . . . . . » 283
§ 2. Nozioni sui gruppi armonici . . . . . » 288
§ 3. Problemi metrici di primo grado . . . . . » 290
§ 4. I problemi metrici di secondo grado . . . . . » 298
§ 5. Costruzioni colla riga a due orli paralleli: primo modo di usare l' istrumento . . . . . » 304
§ 6. La riga a due orli come sostituto del compasso . . . . . » 306
§ 7. Costruzioni colla squadra e colla falsa squadra . . . . . » 309

ARTICOLO DECIMO

Sulla risolubilità dei problemi geometrici cogli istrumenti elementari: contributo della geometria analitica di Guido Castelnuovo a Roma . . . . . » 313

I

§ 1. Operazioni che possono eseguirsi mediante la riga sui segmenti di retta . . . . . » 316
§ 2. Digressione relativa ai campi di razionalità . . . . . » 320
§ 3. Altre forme dell' enunciato del § 1 . . . . . » 322
§ 4. Enunciato proiettivo delle operazioni che la riga permette di eseguire sopra una retta . . . . . » 322
§ 5. Le costruzioni metriche di planimetria eseguibili colla riga quando sia dato un parallelogramma. . . . . » 325
§ 6. Le costruzioni grafiche di planimetria eseguibili colla riga. » 328
§ 7. Quali siano i problemi risolubili colla sola riga . . . . . » 331

II

§ 8. Quale contributo porti l' aggiunta del compasso alla riga. » 335
§ 9. Quali problemi possano risolversi colla riga e col compasso. » 339

§ 10. Cenno sopra alcuni problemi classici . . . . . Pag. 342
§ 11. Di alcuni semplici strumenti che possono servire a risolvere problemi geometrici: il trasportatore di segmenti . » 343
§ 12. L' uso del cerchio fisso . . . . . » 348
§ 13. La riga a due orli paralleli . . . . . » 350

ARTICOLO UNDECIMO

Sulle equazioni algebriche risolubili per radicali quadratici e sulla costruibilità dei poligoni regolari di FEDERIGO ENRIQUES a Bologna . . . . . » 353

I

§ 1. Riduzione delle espressioni irrazionali quadratiche a forma normale . . . . . » 357
§ 2. Formazione di un' equazione algebrica a cui soddisfa una espressione quadratica . . . . . » 360
§ 3. Sul grado delle equazioni irriducibili risolubili per radicali quadratici . . . . . » 363

II

§ 4. Riduzione del problema dei poligoni regolari alle equazioni binomie . . . . . » 368
§ 5. Irriducibilità dell' equazione $\frac{z^p - 1}{z - 1} = 0$, quando p è un numero primo. . . . . » 372
§ 6. Impossibilità di costruire elementarmente i poligoni regolari di un numero primo p di lati, quando p non ha la forma $2^n + 1$. . . . . » 377
§ 7. Costruibilità dei poligoni regolari di un nunero primo p di lati, qaando p ha la forma $2^n + 1$. . . . . » 378
§ 8. Sui numeri primi della forma $2^n + 1$. . . . . » 386
§ 9. Applicazione del metodo di Gauss al caso del pentagono regolare . . . . . » 389
§ 10. Poligoni regolari con un numero di lati composto . . . . » 390
§ 11. Osservazioni sulla determinazione dei poligoni regolari che non sono costruibili elementarmente . . . . . » 394

ARTICOLO DODICESIMO

Sulle costruzioni dell' ettadecagono regolare di Ermenegildo Daniele a Torino . . . . . Pag. 397

I

§ 1. Risoluzione dell' equazione binomia $z^{17} = 1$ . . . . . » 398

II

§ 2. Costruzione di J. Serret, modificata da Bachmann . . . . . » 404
§ 3. Costruzione di Staudt. . . . . » 406
§ 4. Costruzione di Gérard . . . . . » 411

ARTICOLO TREDICESIMO

Problemi di 3.° grado: Duplicazione del cubo. Trisezione dell' angolo di Alberto Conti a Bologna . . . . . » 415

I

§ 1. Impossibilità di risolvere elementarmente il problema della duplicazione del cubo . . . . . » 418
§ 2. Duplicazione del cubo mediante coniche. Metodi di Menecmo. » 420
§ 3. Duplicazione del cubo mediante la concoide di Nicomede. » 423
§ 4. Duplicazione del cubo mediante la cissoide di Diocle . . . » 427
§ 5. Metodi meccanici per la risoluzione del problema della duplicazione del cubo. Metodo di Platone . . . . . » 431
§ 6. Costruzione mediante l' integrafo. . . . . » 433
§ 7. Generalità relative alle costruzioni approssimate. . . . . » 433
§ 8. Risoluzione di Apollonio . . . . . » 435
§ 9. Metodo di Vargiù . . . . . » 437
§ 10. Metodi di Buonafalce . . . . . » 439
§ 11. Metodo del Boccali . . . . . » 442

II

§ 12. Impossibilità di risolvere elementarmente il problema della trisezione dell' angolo. . . . . » 445
§ 13. Trisezione dell' angolo mediante coniche . . . . . » 451
§ 14. Trisezione dell' angolo mediante la concoide di Nicomede. » 453
§ 15. Trisezione dell' angolo mediante la lumaca di Pascal. . . » 454

§ 16. Metodi meccanici per la trisezione dell' angolo - Strumenti trisettori . . . . . Pag. 456
§ 17. Trisezione approssimata dell' angolo secondo E. Cominotto. » 459
§ 18. Trisezione approssimata dell' angolo secondo Pompeo Monti. » 464

III

§ 19. Problemi di 3.° grado: loro risoluzione mediante una parabola fissa . . . . . » 467
§ 20. Riduzione di tutti i problemi di 3.° grado alla trisezione dell' angolo . . . . . » 468

ARTICOLO QUATTORDICESIMO

Sui problemi trascendenti e in particolare sulla quadratura del circolo di Benedetto Calò a Teramo . . . . . » 471

§ 1. Problemi algebrici e trascendenti . . . . . » 471
§ 2. Prime proprietà dei numeri algebrici . . . . . » 476
§ 3. Dimostrazione dell' esistenza di numeri trascendenti . . . . » 480
§ 4. Il lemma di Weierstrass . . . . . » 486
§ 5. Dimostrazione del teorema generale di Lindemann . . . . » 494
§ 6. Trascendenza dei numeri e e π. Impossibilità di rettificare con riga e compasso una circonferenza di dato raggio o un arco di cerchio di cui è data la corda . . . . . » 504
§ 7. Risoluzione grafica del problema di rettificazione e quadratura del cerchio mediante l'integrafo . . . . . » 506
§ 8. Costruzioni geometriche per rettificare e quadrare il cerchio in modo approssimato . . . . . » 513
§ 9. Lunule quadrabili . . . . . » 516
§ 10. Cenno storico sulle ricerche relative al problema della quadratura del cerchio dai tempi antichi fino ai nostri giorni . . . . . » 519

INTRODUZIONE

L' opera geometrica dei Greci, a noi tramandata col nome d' Euclide, è in sè così bella ed armoniosa che, dopo venti secoli, non sapremmo ad essa sostituire, nella scuola secondaria, qualche altro insegnamento di Geometria meglio rispondente alle esigenze della coltura e dell' educazione intellettuale. A noi infatti non sembra che sieno da accogliere, senza il conforto di un esperimento favorevole, le proposte tendenti a cambiare gli ordinamenti dei primi studii geometrici, informandoli a quei principii sintetici che dominano ormai gli sviluppi più elevati della nostra scienza.

Lo spirito analitico euclideo crediamo più efficace strumento educativo delle intelligenze, più conforme al senso della realtà geometrica, fino a che un esercizio opportuno abbia reso le menti capaci di scernere nei concetti astratti l' immagine di una realtà più generale.

E quando pur volessimo pensare alla preparazione dei futuri matematici (mentre è ben diverso lo scopo della scuola secondaria), non potremmo dimenticare che le prime conoscenze geometriche debbono essere il comune fondamento di tutte le forme della coltura matematica, e schiudere l' intelletto non soltanto alla Geometria, ma all' Analisi e alla Fisica teorica, più legate alla concezione euclidea delle figure particolari.

Crediamo tuttavia che l' insegnamento geometrico pur restando, nei suoi caratteri essenziali, conforme all' opera d' Euclide, possa avvantaggiarsi dei progressi portati, anche nel campo degli elementi, da una critica più matura e dagli sviluppi recenti delle alte Matematiche.

Crediamo soprattutto che di tali progressi debbano possedere una cognizione assai larga gli insegnanti cui la scuola secondaria è affidata, affinchè l' opera loro possa ispirarsi a più larghe vedute.

Questo pensiero ci ha suggerito l' idea di raccogliere per essi, e per gli allievi delle nostre scuole di Magistero, gli scritti che quì presentiamo, concernenti le prime questioni relative ai principii della Geometria e le costruzioni atte a risolvere i problemi determinati, poichè appunto in questi due ordini di questioni si riflettono particolarmente i progressi portati dalle Matematiche superiori nel campo elementare.

L' opera di coordinazione, certamente non facile, fu resa possibile dal buon volere degli egregi collaboratori, i quali offrendo gentilmente il contributo della loro intelligenza ed esperienza didattica, accondiscesero ad entrare con noi in un comune ordine d' idee. Di ciò rendiamo loro vivissime grazie [1], mentre chiediamo al lettore di giudicare indulgentemente le deficienze inseparabili dall' esecuzione di un tale disegno, che a noi soltanto debbono essere imputate.

Del resto non vi è quì la pretesa di presentare una trattazione sistematica ed omogenea degli svariati argomenti di studio. Ciascun collaboratore ha portato, nel suo lavoro, uno spirito proprio ed un giudizio personale. Soltanto nella disposizione delle parti, e nella formulazione dei singoli programmi, fummo guidati dall' intendimento che i varii articoli, nel loro insieme, dessero un' idea sufficientemente adeguata delle principali questioni interessanti la Geometria elementare.

Del contenuto dei singoli scritti diremo ora brevemente.

Nell' art. 1 parliamo dell' importanza scientifica e didattica dei problemi concernenti i principii della Geometria. Questi problemi, guardati sotto un aspetto elevato,

---

[1] Dobbiamo pure ringraziamenti cordiali al dott. UMBERTO CONCINA, che, con intelligente cura, sovraintese alla stampa di questi collectanea.

escono dal campo degli elementi; ma quì essi vengono lumeggiati nelle loro più strette attinenze colla Geometria elementare.

Valgano gli articoli, che ad essi si riferiscono, a porre in luce la necessità, imposta dal rigore scientifico, di enunciare, come postulati, tante osservazioni di carattere intuitivo di cui generalmente si fa un uso implicito: così le prime proprietà dei segmenti e degli angoli (art. 2), e la proposizione relativa alle intersezioni di rette e circoli, che non potrebbe giustificarsi senza ricorrere al concetto della continuità (art. 4). Nè si veda un inconveniente didattico nel moltiplicare il numero dei postulati. Una difficoltà si presenterebbe soltanto quando di essi volessero ricercarsi, con critica minuta, i rapporti logici, in omaggio al criterio d' indipendenza, mentre un più ampio esercizio dell' osservazione intuitiva, tendente a rimuovere ogni ipotesi sottintesa, sembra altamente educativo (cfr. art. 1, II).

Alla cura di enunciare esplicitamente *tutti* i postulati, deve andare unita l' avvertenza di indicare quali sono i concetti fondamentali, assunti senza definizione dalla realtà fisica o intuitiva.

Valgano gli articoli 2, 3 a guidare gli insegnanti nella scelta di tali concetti, per una buona introduzione delle proprietà fondamentali della *retta*, del *piano* e della *congruenza* (o *eguaglianza*).

Relativamente a quest' ultimo concetto prevale l' opinione ch' esso s' introduca naturalmente ricorrendo al *movimento* dei corpi solidi. A ciò nulla abbiamo da obiettare, quando del movimento si faccia uso come di un principio di prova sperimentale per dedurne le prime proprietà della congruenza, e queste si enuncino quindi esplicitamente, come postulati. Altrimenti si dovrebbero formulare logicamente le proprietà del movimento stesso, assunto come concetto fondamentale, il che non sembra siasi fatto fino ad ora negli elementi, in modo esente da critiche.

L' articolo 5 tratta le questioni fondamentali relative alla teoria dell' equivalenza, per la quale è sempre vivo l' interesse, fra gli insegnanti delle nostre scuole secondarie.

A più elevato argomento si volge l' articolo 6 concernente la teoria delle parallele e le geometrie non-euclidee. Sebbene tali discussioni non possano, per la natura loro, esser portate in un primo insegnamento, la storia di esse e gli sviluppi elementari a cui dettero origine, debbono ormai far parte della coltura di ogni maestro di Geometria.

La seconda parte di questi collectanea è dedicata ai problemi determinati, e si propone di chiarire, da un lato l' importante concetto della *risolubilità dei problemi,* dall' altro lato i *metodi* che *per la loro risoluzione si incontrano.*

Nel campo elementare i metodi di risoluzione dei problemi sono stati discussi in un eccellente libretto del Petersen. Le principali osservazioni da lui svolte, nonchè il contributo degli scritti ulteriori su tali questioni, costituiscono l' argomento dell' articolo 7 dei nostri collectanea.

Di altri metodi che, in una certa misura, crediamo possono portarsi nell' insegnamento secondario, trattano gli articoli 8 e 9, i quali si propongono di volgarizzare la conoscenza della geometria del compasso e delle elementari applicazioni grafiche della geometria proiettiva; i detti metodi si vedono poi adoperati nell' articolo 12 per costruire l' ettadecagono.

Ci permettiamo di indicare all' attenzione del lettore come le più semplici costruzioni colla sola riga e col solo compasso potrebbero formare oggetto di interessanti ed utili esercitazioni pei giovani, tanto più in quanto alcune di esse rispondono ad esigenze pratiche della *geometria sul terreno*, dalle quali appunto ebbero origine.

Alla risolubilità dei problemi, si volgono i successivi articoli 10, 11, 13, 14, il primo dei quali contiene alcune delicate osservazioni relative al modo di tradurre la questione in forma algebrica, coll' uso delle coordinate; gli altri comprendono la storia e l' esposizione di quelle ricerche che si riattaccano ai problemi classici della costruzione dei poligoni regolari, della duplicazione del

cubo, della trisezione dell' angolo, della quadratura del circolo.

Tali questioni sono state svolte recentemente in una serie di conferenze del signor Klein, alla quale dobbiamo in parte l' idea di questa raccolta. Quì esse vengono riprese e trattate con più larghi sviluppi, particolarmente storici.

Terminiamo queste linee di prefazione, esprimendo il comune sentimento ed augurio nel quale a noi si uniscono tutti i collaboratori: che l' opera nostra possa riuscire profittevole agli insegnanti delle scuole secondarie italiane, che essa valga a richiamare la loro attenzione sui progressi recati nel campo elementare dagli sviluppi più elevati delle scienze matematiche!

Bologna, Febbraio 1900.

Federigo Enriques

ARTICOLO PRIMO

« Sull'importanza scientifica e didattica delle questioni che si riferiscono ai principii della Geometria » di Federigo Enriques a Bologna.

Le questioni che si riferiscono ai fondamenti della Geometria sono variamente intese, a seconda delle tendenze individuali, sicchè la loro importanza rispetto all' insegnamento viene pure apprezzata in modo diverso, in relazione al diverso giudizio.

All' indirizzo tecnico o professionale di coloro che, avendo di mira soltanto le applicazioni della scienza, poco o nulla si curano dei principii teorici, fa riscontro un indirizzo critico tendente ad introdurre, fino negli elementi, quel rigore logico che costituisce la suprema legge armonica dell' edificio geometrico. Ma contro questa tendenza, in gran parte pel modo come si traduce in atto, si levano da ogni parte obiezioni non prive di valore, in nome delle esigenze didattiche. Molti credono che le questioni relative ai postulati della nostra scienza abbiano soltanto un valore logico rispondente ad un senso critico raffinato, e sono tratti a domandarsi se valga la pena di affaticare con esse la mente dei giovani

per una compiacenza subiettiva del maestro, rendendo così inutilmente difficili i primi passi del discente, e allontanando da lui l'acquisto delle cognizioni positive più atte a suscitarne l'interesse.

Dinnanzi a tali giudizii discordi, stimiamo non inutile dedicare all'argomento alcune osservazioni, proponendoci di rischiararne due aspetti principali: 1.° quale sia il valore scientifico delle questioni relative ai principii della Geometria; 2.° se e come la conoscenza di esse possa rendere l'opera del maestro più efficace e più utile.

I

§ 1. **Le basi empiriche della Geometria.** — Insistiamo anzitutto su ciò, che i problemi relativi ai principii non rispondono soltanto al desiderio d'un ordinamento logico rigoroso della scienza. Ben più alta è la loro importanza e più vasto il loro campo! Tanti problemi della psicologia e della teoria della conoscenza vi si riannodano!

Rivolgiamo la nostra attenzione al complesso delle cognizioni geometriche e cerchiamo un confronto nel dominio delle cognizioni fisiche.

Si sottopongano due enunciati a persona che non abbia alcuna idea dei metodi di dimostrazione matematica: *a)* in un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sopra i cateti; *b)* nella caduta dei gravi le velocità sono proporzionali ai tempi.

La supposta persona cercherà di *verificare coll'esperienza* l'esattezza dei due enunciati, procedendo fondamentalmente nello stesso modo; potrà ricorrere ad es. nel primo caso al taglio della carta o all'uso di strumenti

di misurazione delle aree; nel secondo caso alla macchina d' Atwood o al piano inclinato di Galileo.

Stabiliti in questo modo, i due enunciati appaiono ugualmente esprimenti due *verità fisiche*, a noi rivelate dall' esperienza, ossia dalle sensazioni aiutate e corrette dagl' istrumenti.

Ma per chi ha un' idea dell' organismo matematico le cose appaiono diversamente. La dimostrazione sperimentale dell' enunciato *a)* non sembra soddisfacente, se ne vuole la *dimostrazione matematica,* mentre sembra impossibile di accampare la stessa esigenza relativamente all' enunciato *b).*

Dunque, vien fatto di domandare, vi è una *certezza matematica* superiore alla *certezza fisica,* sicchè ciò che sembra rigorosamente dimostrato al fisico si presenta ancora incerto al matematico, come un problema da risolvere? E dove attingerà il secondo questa superiore certezza che al primo non è dato raggiungere?

Per rispondere conviene esaminare in che cosa consista il procedimento di dimostrazione matematica.

Il matematico a cui viene proposta una questione possiede già alcune preliminari cognizioni; sono proprietà che, nel momento, egli ritiene fondate senza discussione, ed il suo modo di procedere è soltanto una *deduzione logica* di nuove conseguenze dalle premesse conosciute. Il suo è essenzialmente un *processo di riduzione.*

Anche nella dimostrazione del fisico c' è una riduzione a cose note; l' uso d' uno strumento più complicato e l' interpretazione delle esperienze cui esso conduce è legato ad un procedimento mentale che si fonda sull' uso d' istrumenti più semplici e sull' interpretazione, già nota, delle relative esperienze; soltanto questo procedimento mentale *non è più soltanto logico, ma è anche empirico*, in quanto trae nuovi elementi dalle sensazioni.

Ora quì è tutta la differenza e tutta la superiorità del metodo matematico. Ogni sensazione, e quindi anche ogni esperienza, racchiude qualche cosa d' incerto o di non bene determinato [1], sicchè la riduzione fisica sembra contenere qualche elemento d' incertezza rispetto alle premesse; al contrario invece la riduzione matematica appare perfetta, sicchè alle nuove deduzioni si attribuisce esattamente lo stesso valore di certezza accordato alle premesse.

Ma non dimentichiamo la cosa essenziale, che cioè la dimostrazione matematica e fisica sono soltanto due diversi processi di riduzione, fondati su alcuni dati *noti*. Ora su che si appoggia la conoscenza di questi dati? Generalmente sopra un processo di riduzione analogo, che ci sospinge di passo in passo a dati sempre più semplici.

Ma non possiamo risalire indefinitamente la serie, senza giungere a qualche cosa che dobbiamo primitivamente accettare senza riduzione ulteriore, sotto pena di aggirarci in un circolo vizioso.

Appunto a questi *dati primitivi* dobbiamo volgere la nostra attenzione. Dobbiamo domandarci su quale fondamento noi siamo tratti ad accettarli, e se i dati geometrici a cui conduce il procedimento di riduzione matematica, si appoggino sopra una base essenzialmente diversa dei dati primitivi della fisica.

La domanda involge veramente le più gravi difficoltà filosofiche. Ma, senza entrare in discussioni troppo ardue ed elevate, non consentanee all' indole di questo scritto, ci limitiamo a rispondere che i dati primitivi della Geometria e della Fisica vengono acquistati fonda-

---

[1] Veramente sarebbe quì il caso di distinguere tra *esperienze qualitative* e *quantitative*, ma non ci sembra necessario di dilungarci su tale distinzione.

mentalmente nello stesso modo, sulla base di certe *sensazioni immediate* o di certe *esperienze elementari* semplicissime, interpretate conformemente alla *struttura logica* della nostra mente.

La semplicità e soprattutto la riprova che dà la costante ripetizione di queste esperienze, la facoltà di procurarne volontariamente e di attenderne i resultati, e la loro logica concordanza, sembrano le sole ragioni per cui si attribuisce il massimo grado di certezza ai *postulati* ricavati dalle nominate esperienze elementari, escludendo, per quanto è possibile, tutto ciò che comparisce di non bene definito o determinato nel fenomeno della sensazione.

Ma in definitiva la base della certezza è una sola, nella Geometria come nella Fisica; è una *base empirica* che dà anche alla Geometria il carattere di una scienza sperimentale.

Nè invero il differente modo di sviluppo delle due scienze stabilisce tra di esse una intima differenza. La dimostrazione puramente logica e matematica si applica anche nello studio dei fenomeni fisici, allorchè si ha una connessione ben determinata con altri fenomeni sperimentalmente conosciuti. Dunque vi è soltanto una differenza di grado: il metodo empirico usato per stabilire poche proposizioni fondamentali nella Geometria, prevale invece nella dimostrazione delle proposizioni fisiche.

Ciò che si è detto relativamente alla *dimostrazione* delle proposizioni geometriche, si può ripetere parallelamente, paragonando la *definizione* degli enti geometrici a quella degli enti fisici. Gli enti fisici, sieno oggetti o relazioni fra oggetti, vengono definiti, in generale, mediante un' osservazione sensibile, cioè per via empirica; la definizione logica si dà soltanto di taluni enti più complicati o meno osservabili nella realtà. All' opposto invece, nella Geometria, si cerca per quanto è possibile di definire

logicamente ciò che è oggetto di studio, riducendo così ogni concetto ad altri concetti più semplici. Ma questo processo di definizione è anch'esso un processo di riduzione, sicchè la pretesa di tutto definire logicamente appare anche quì illusoria e priva di senso.

Alcuni enti geometrici, elementi primitivi su cui si basano le successive definizioni, debbono esser *dati* in modo empirico o psicologico come enti della realtà fisica o rappresentanti di tali enti. Sicchè questi *concetti primitivi* della Geometria non appaiono diversi dai concetti fisici.

E quì, come nell' ordine dimostrativo, la scienza geometrica e la fisica si presentano medesimamente sotto un aspetto empirico, avendosi soltanto una differenza di grado nel maggior ufficio che la definizione logica ha, nel primo caso, in confronto alla definizione empirica o psicologica.

§ 2. **L' intuizione geometrica.** — Esaminiamo ora più attentamente le osservazioni elementari su cui riposano i postulati della Geometria, ed avvertiamo un peculiare carattere che le distingue dalle comuni osservazioni fisiche.

Questo carattere risiede nel sentimento di necessità che accompagna l' *evidenza geometrica* e dà quasi l' illusione di una necessità logica.

Ma sarebbe un errore grossolano, scambiare l' evidenza geometrica coll' evidenza logica. Quest' ultima si può riferire soltanto ad una relazione di dipendenza tra gli enunciati di due fatti, mai all' enunciato d' un fatto.

Si potrebbe pensare tuttavia che i postulati esprimessero condizioni *a priori* della sensibilità soggettiva, quasi leggi strutturali della psiche, anzichè dati reali delle sensazioni esteriori. Tale modo di vedere, strettamente *kantiano,* sembra ormai oltrepassato dalla critica.

Però le circostanze da cui esso ha origine meritano una speciale considerazione.

Si può affermare un fatto geometrico elementare, ossia enunciare un postulato, senza eseguire un' esperienza effettiva. Basta rivolgere l' *intuizione interna* sopra certi concetti che troviamo già formati nella nostra mente.

Un procedimento analogo può essere seguito anche per enunciare i più comuni e semplici fatti fisici che ci sono familiari, quando l' osservazione ripetuta di essi ci ha già permesso di conoscerli in modo adeguato. L' intuizione ci appare allora come la ripresentazione mentale d' una esperienza. Tuttavia, in questo ultimo caso, essa ha piuttosto un carattere contingente che necessario.

Per spiegarci il sentimento di necessità che accompagna i postulati geometrici, bisogna considerare una differenza peculiare tra i due casi: *mentre generalmente noi assistiamo consci al formarsi dei concetti fisici, la costruzione dei concetti geometrici ci appare anteriore ad ogni atto della coscienza riflessiva.* E poichè di questi ultimi concetti non possiamo immaginare condizioni formative diverse, le proprietà di essi si presentano alla nostra mente come indissolubilmente legate in un fisso vincolo di relazioni.

Lo studio di queste relazioni è oggetto del problema matematico concernente i principii della Geometria, intuitivamente fondata. Ma alla formazione degli stessi concetti geometrici si volgono le ricerche psicologiche, ed alla rispondenza che essi trovano nella realtà fisica si riattacca il problema filosofico.

Noi parleremo anzitutto, in breve, delle questioni, che quì si presentano nell' ordine matematico, e indicheremo poi come esse si leghino alle accennate questioni psicologiche e filosofiche.

§ 3. **Concetti e proposizioni fondamentali della Geometria.** — Poichè le proposizioni della Geometria vengono logicamente ordinate secondo *definizioni* e *dimostrazioni,* e poichè vi sono *concetti primitivi* o *fondamentali* che non possono essere definiti per mezzo di altri più semplici, e *postulati* ossia *proposizioni fondamentali* non dimostrabili per mezzo di altre proposizioni più elementari; nasce il problema di scegliere i concetti che per la loro semplicità sembrano più atti ad essere dati come primitivi (senza definizione) e di assegnare le proposizioni che per il loro carattere elementare sembra più conveniente enunciare come postulati (senza dimostrazione). Ma la semplicità ed elementarità, di cui quì si parla, non hanno un valore assolutamente obiettivo, poichè esprimono una più facile visibilità o *evidenza intuitiva.* D' altra parte, la nostra intuizione ci dà, come immediatamente evidenti, più proposizioni e più concetti, di quanti occorre mettere a fondamento di una formulazione logica della Geometria.

Pertanto il problema di assegnare una tale formulazione può essere risoluto secondo varii criterii. Vi sono tuttavia delle condizioni teoriche, a cui si cerca generalmente di uniformarsi, per quanto è possibile, quasi a norme di una ideale perfezione logica:

a) 1). Tutti i concetti che compariscono nella trattazione debbono esser dati esplicitamente come *primitivi* o *fondamentali,* senza definizione, o venir definiti logicamente per mezzo dei concetti primitivi.

In ultima analisi, dunque, non debbono entrare nella trattazione se non i concetti primitivi, ed i *concetti puramente logici,* come p. e. i concetti di *appartenenza* (significato dal verbo « essere » o « contenere »), di *ordine*, di *corrispondenza,* ecc.

2) È desiderabile che i concetti primitivi sieno fra loro *assolutamente indipendenti,* per modo che non sia

possibile definire logicamente uno qualunque di essi per mezzo degli altri.

b) 1). Tutte le proposizioni che compariscono nella trattazione debbon essere enunciate esplicitamente come *postulati,* o venire logicamente dimostrate per mezzo di altri postulati.

In ultima analisi, dunque, non debbono entrare nel ragionamento, se non le premesse contenute nei postulati e gli *assiomi* esprimenti le leggi della logica deduttiva.

2) È desiderabile che i postulati sieno fra loro *assolutamente indipendenti,* per modo che nessuno di essi possa essere dimostrato in base ai rimanenti.

Le condizioni *a) 1)* e *b) 1)* sono essenziali, perchè si abbia una Geometria trattata in modo *rigorosamente* logico. Esse permettono di dimenticare il contenuto dei concetti che vi figurano, considerando la trattazione stessa come una *teoria logica astratta* nella quale entrano soltanto dei simboli non determinati, legati da certe relazioni.

Questo modo astratto di concepire la Geometria ha una grande importanza, perchè fissando in varie guise il senso dei simboli indicati, si possono ottenere varie *interpretazioni* di una stessa teoria astratta, riuscendo così a porre un legame fra più teorie geometriche concrete; un tale legame consiste in ciò che « si possono tradurre tutte le proposizioni dell' una teoria in proposizioni dell' altra, sostituendo, in modo determinato, i concetti che figurano nella prima con quelli della seconda ». Un esempio di ciò si ha nella *legge di dualità* della Geometria proiettiva o della Geometria sferica.

Ogni insieme di proposizioni, che soddisfi ai requisiti *a) 1)* e *b) 1),* può considerarsi come una *teoria logica astratta,* capace di ricevere generalmente varie interpretazioni concrete (geometriche o non geometriche), purchè

le ipotesi espresse dai postulati sieno *logicamente compatibili,* ossia *non contraddittorie.*

La possibilità di ricevere una interpretazione effettiva sicchè la teoria possa riguardarsi come esprimente un insieme di fatti intuitivi o fisici, assicura *a priori* che la condizione di compatibilità è soddisfatta, e ciò in base ad un supremo principio della ragione.

Per la Geometria dunque, in quanto essa è fondata sull' intuizione, non occorrerà domandarsi se i postulati sono compatibili, purchè essi sieno intuitivamente evidenti.

I requisiti *a) 2), b) 2)* esprimono piuttosto condizioni di *eleganza* della trattazione, anzichè condizioni di rigore. Vedremo più tardi in qual senso tali requisiti appariscano veramente importanti.

L' indipendenza di più concetti può essere riconosciuta immediatamente coll' intuizione (ad es. quando si tratta di concetti rientranti in diverse categorie logiche) ed allora essa può servir di base al riconoscimento della indipendenza di alcuni gruppi di postulati.

D' altra parte si può riconoscere che un postulato a è indipendente da altri dati $b, c \ldots$, facendo vedere che l' ipotesi opposta ad a è compatibile colle $b, c \ldots$. Perciò si presenta naturale il procedimento seguente: si attribuisca convenzionalmente un senso, diverso dal senso originale, ai simboli che entrano nella trattazione a denotare i concetti primitivi, e si cerchi così di *interpretare* la teoria logica basata su $b, c \ldots$ e sulla negazione di a, in un modo conforme all' intuizione. La possibilità di una siffatta interpretazione serve a stabilire l' indipendenza domandata.

Quì è forse opportuno di avvertire che non sarebbe lecito affermare l' indipendenza della proposizione a dalle $b, c \ldots$, soltanto in base all' inanità d' innumerevoli tentativi fatti per dimostrare la a; tale dimostrazione invero potrebbe essere difficilissima ma non impossibile.

Volendosi l' indipendenza assoluta di un sistema di postulati, occorre anzitutto che essi vengano formulati in modo *non ricorrente,* cioè che ciascuno di essi abbia un senso prescindendo dagli altri. In mancanza di questo requisito si potrà domandare soltanto l' *indipendenza ordinata,* ossia l' impossibilità di dedurre ciascun postulato dai *precedenti.*

L' indipendenza di un sistema di postulati è anche relativa alla *composizione* dei postulati stessi. Quando una proposizione a si lasci scomporre in due altre *(più semplici)* a', a'', che prese insieme equivalgano ad a, può ben accadere che la a non dipenda dalle altre proposizioni date $b, c \ldots$, ma che in base alle $b, c \ldots$ si riesca a dimostrare la a'; allora è chiaro, che il postulato a contiene qualche cosa di superfluo, potendo essere rimpiazzato con a''.

Si può istituire una analoga osservazione relativamente all' indipendenza dei concetti fondamentali, ove si consideri la possibilità di sostituire un dato concetto A *più particolare,* con due altri B e C *più generali,* per modo che A risulti definito come un elemento comune alle classi di enti B e C.

L' indipendenza dei concetti e delle proposizioni fondamentali ha dunque un valore tanto più significativo quanto più sono osservate le condizioni di:

a) 3) Generalità dei concetti.

b) 3) Semplicità dei postulati.

Noi non vogliamo entrare in discussioni logiche troppo sottili, per mostrare come non sia possibile soddisfare a queste condizioni in modo assoluto. Si può tuttavia attribuire ad esse un valore relativo convenientemente precisato, ed *avvicinarsi* così, in varii modi, ad una formulazione logica della Geometria idealmente perfetta.

Ma i criterii di cui si è discorso hanno soltanto un valore logico, sicchè una formulazione della Geometria

che più si avvicini ad essere idealmente perfetta secondo tali criterii, può apparire non soddisfacente sotto altri riguardi.

Abbiamo osservato che è lecito di concepire la Geometria in modo astratto, rilevando il vantaggio di una siffatta concezione. La Geometria astratta può ricevere varie interpretazioni e trarre così nuovi aiuti da varie forme dell' intuizione. Ma ove, all' opposto, si voglia prescindere affatto da ogni maniera d' interpretarla, costruendo un edifizio puramente logico, in base a criterii esclusivamente logici, si corre il pericolo di cadere nel vuoto.

S' incontrerebbe quì, nel campo matematico, quella stessa esagerazione formale di cui offrono largo esempio certe recenti manifestazioni dell' arte: nobile è l' idealità della forma che si eleva salendo dalle materie particolari alle più alte espressioni dell' armonia generale; ma il pensiero sfuma e si dilegua nel nulla, come nebbia vaga, incoerente, allorchè si oltrepassano i limiti del reale per seguire soltanto le leggi dei simboli.

Restando nel campo della Geometria, non bisogna dimenticare che tale scienza è scienza di fatti, fisici o intuitivi, che vogliano considerarsi. Il formalismo logico deve essere concepito, non come un fine da raggiungere, ma come un mezzo atto a svolgere e ad avanzare le facoltà intuitive. Gli stessi resultati più lontani, logicamente stabiliti, non debbono ancora considerarsi come un acquisto maturo, fino a che non possano essere in qualche modo intuitivamente compresi. Ma *nei principii l' evidenza intuitiva deve risplendere luminosa.*

Ora come tale condizione d' evidenza si accorda colle norme logiche sopra indicate?

Si trovano qui certi limiti, non prefissati in modo assoluto, ma relativi allo stato di sviluppo della nostra coscienza geometrica.

c) 1) Perchè i postulati possano dirsi evidenti, debbono riferirsi immediatamente ai concetti primitivi. Questa condizione costringe talvolta ad assumere concetti primitivi non indipendenti.

Se intendiamo che il concetto A venga definito logicamente per mezzo di altri concetti $B, C\ldots$, anche le proprietà di A dovranno essere dedotte da quelle (che ci vengono rivelate dalla intuizione) di $B, C\ldots$; quindi se nella trattazione figura un postulato desunto dal modo con cui A viene intuito, questo porta l'implicita considerazione di un nuovo elemento concettuale primitivo, non contenuto in $B, C\ldots$

Un esempio di ciò è offerto dalla proposizione fondamentale del piano: se si pensa la *retta* come un ente primitivo, e si vuol *definire* il *piano* colla proiezione della retta da un punto esterno, si deve anche dimostrare che la superficie così costruita contiene ogni retta determinata da due dei suoi punti; se invece si dà questa proposizione come un postulato, si deve riguardare anche il piano come un ente primitivo, in quanto la nominata proposizione non potrebbe essere intuita se ci formassimo soltanto un' immagine mentale della retta e non avessimo una rappresentazione del piano.

c) 2) L' intuizione cade prima sui concetti particolari e sale, per astrazioni successive, ai concetti più generali.

Non diremo per questo che i concetti più generali allorchè sono intuiti hanno un minor grado di evidenza in confronto ai particolari, ma l' evidenza loro sta in relazione ad uno stato della mente più progredito, in cui si esercita una facoltà intuitiva più astratta.

Dunque la generalità dei concetti che si possono scegliere come fondamentali per la Geometria (e quindi in certo modo anche la semplicità dei relativi postulati) ha un limite nella capacità d' intuire l' astratto.

D' altra parte anche l' indipendenza dei postulati riesce veramente importante solo quando si sappia assorgere ai concetti più generali che derivano dal tralasciare qualcuno dei postulati. Sicchè l' importanza di essa è pur relativa alla capacità astratta dell' intuizione.

Questa capacità si svolge non soltanto coll' esercizio logico, ma anche, in maggior grado, coll' educazione sperimentale.

Riferiamoci ad un esempio: L' idea che comunemente ci si forma della « linea » e della « superficie », ricavata per astrazione da pochi casi particolari, è molto meno generale di quella accolta dal geometra. Chi ha avuto sott' occhio soltanto il piano, la sfera, i coni, i cilindri ed altre analoghe superficie a punti *ellittici* o *parabolici,* non si rappresenta una superficie (a punti *iperbolici)* attraversata in ciascun punto dal piano tangente, come ad es. l' *iperboloide rigato.* Similmente senza aver veduto la superficie di *Möbius* o qualche altra superficie *unilatera*, chi non affermerebbe che ogni superficie ha due facce ben distinte ed irriducibili per moto continuo?

La conoscenza delle superficie a punti iperbolici e delle unilatere, allarga il comune concetto della superficie, permettendoci di abbracciare coll' intuizione un maggior numero di casi.

Ma il geometra si spinge molto al di là della progredita intuizione, allorchè pensa linee e superficie con infinite oscillazioni, linee senza tangente e superficie senza piano tangente ecc.

Ebbene, la possibilità logica di tali casi non basta a dar luogo ad un concetto intuitivo di linea e di superficie in cui essi possano venir compresi. Pertanto siffatte linee e superficie (di cui il nome stesso è abusivo) non sono veri enti geometrici, ma piuttosto ideali rappresentanti delle funzioni.

I concetti di linea e di superficie sono fondamentali per la Geometria; gli sviluppi della teoria delle funzioni possono illuminare i rapporti logici fra le proprietà di tali enti, e possono anche svolgere fino ad un certo punto l'intuizione loro; ma vi è un limite nell'intuizione stessa, al di là del quale gli enti suddetti perdono il loro senso rappresentativo; e questo limite di generalità non può essere oltrepassato, da chi vuol porre a fondamento della Geometria concetti intuitivamente comprensibili.

c) 3) L'intuizione, nello scendere dai concetti generali ai particolari, rivela successivamente le nuove proprietà determinative in modo ricorrente (seguendo l'ordine inverso del procedimento d'astrazione che ha generato i detti concetti generali).

Questo fatto psicologico porta naturalmente ad enunciare una serie di postulati ricorrenti, pei quali non si può parlare d'indipendenza assoluta, ma soltanto di indipendenza ordinata.

L'assoluta indipendenza dei postulati esige dunque che i concetti particolari vengano generalizzati per astrazione, non in un modo solo, ma in più modi diversi.

Le osservazioni precedenti mostrano un rapporto necessario fra i progressi delle questioni riferentisi ai principii, ed i più elevati sviluppi della Geometria, tendenti a concetti più generali ed astratti, e ad una più alta educazione delle facoltà intuitive. Indicano così che tali progressi non dovranno condurre ad una ultima e non sorpassabile formulazione dei nominati principii, ma continueranno incessanti fino a che duri il moto progressivo della scienza.

§ 4. **I principali indirizzi nelle ricerche relative ai principii della Geometria.** — Nella Geometria elementare compariscono come enti fondamentali, il *punto,* la

retta e il *piano,* a cui si riferiscono le relazioni di *appartenenza* (per es. « due punti appartengono ad *una* retta ecc. » cfr. art. 2), di *divisione in parti* o di *ordinamento* (art. 2, 4), di *congruenza* o di *movimento* (art. 3).

Questi concetti si presentano all' intuizione in modo ricorrente, sicchè ad es. la proprietà della congruenza o del movimento si esprimono in relazione alla retta e al piano ecc. Ma essi trovano uno sviluppo più generale ed indipendente in alcuni rami elevati della Geometria.

La Geometria proiettiva considera i concetti di retta e piano, prescindendo da ogni nozione di eguaglianza e di movimento; essa considera dunque esclusivamente l' insieme delle *proprietà grafiche,* lasciando da parte le *metriche* (che entrano soltanto nelle sue applicazioni). All' opposto invece i concetti metrici trovano uno svolgimento indipendente dalla nozione della retta e del piano, nella *Geometria metrica sopra le superficie* o *le varietà più volte estese* (studiata di solito coi metodi differenziali), dove all' idea dell' *eguaglianza di segmenti o di distanze* si sostituisce l' idea più generale della *ugual lunghezza di archi di linee.*

Ebbene, a questi due rami della Geometria corrispondono due indirizzi principali nelle ricerche concernenti i fondamenti della Geometria, i quali indirizzi pongono in luce l' assoluta indipendenza fra i concetti grafici e metrici, che, risp. in ciascuno di essi, vengono scelti come punto di partenza.

Ma i due rami indicati della scienza geometrica, hanno pur comuni alcune proprietà che insieme costituiscono una teoria distinta. Le proprietà relative alla divisione in parti della retta o del piano, alla continuità ecc., appartengono ad una più ampia famiglia di *linee* e di *superficie,* e lo studio generale di esse dà luogo, si può dire, ad una *teoria del continuo,* che è la Geometria generale delle linee, superficie, varietà a più dimensioni.

comune fondamento della proiettiva e della metrica. A questa teoria del continuo si riattaccano alcuni resultati di Cantor sugli *insiemi*, e gli acquisti generali della *teoria della connessione* o *Analysis situs*. E da essa debbono venire illuminati, prima ed indipendentemente dalle nozioni di retta e piano o di congruenza, i concetti fondamentali di linea e superficie, i veri concetti *primi* della Geometria.

Sono dunque tre gruppi di concetti rispondenti a tre rami elevati della Geometria, ed esprimenti:

1) le proprietà generali delle linee, superficie, varietà;

2) le relazioni di appartenenza fra punti, rette, e piani;

3) le relazioni di congruenza;

intorno ai quali si svolgono tre indirizzi principali dei moderni studi critici.

E, come nei più alti sviluppi della scienza, tutti i metodi della Geometria e dell'Analisi recano quì il loro contributo; in modo speciale i metodi sintetici-proiettivi, la teoria delle forme differenziali quadratiche, gli studi sui gruppi di trasformazioni e quelli sui corpi di numeri, concorrono a rischiarare i principii di una luce più viva. Resta così confermata nel fatto la relazione che avevamo avvertito dover esistere tra i fondamenti della scienza ed i suoi più lontani sviluppi.

A quel modo che l'osservazione più minuta non sa distinguere le parti costitutive di un embrione nella cellula uovo, mentre esse appariscono differenziate, in ordine alle loro funzioni, nello sviluppo embrionale più avanzato; così, anche nell'organismo geometrico, i rapporti tra i concetti fondamentali mal si disvelano negli elementi, ad una critica istituente fra di essi un paragone immediato, e ricevono invece, ed aspettano ancora, una più chiara spiegazione dal progresso delle elevate teorie.

§ 5. **Il problema psicologico dell'acquisto delle nozioni spaziali.** — Ora, quali rapporti legano le menzionate ricerche matematiche al problema psicologico dell' origine dei concetti geometrici?

Abbiam detto che tali concetti nascono da un' esperienza idealizzata, la quale si è continuamente ripetuta in uno stato della mente anteriore alla coscienza adulta.

Le condizioni di una siffatta esperienza sono da un lato caratteri degli organi di senso, e d' altro lato *leggi associative* del pensiero, cioè *elementi strutturali* della psiche secondo i quali si compie, per così dire, l' *interpretazione* dei fenomeni sensibili.

Le sensazioni che contengono qualche elemento spaziale sono le *generali sensazioni tattili-muscolari*, appartenenti a tutta la cute; quelle del *tatto speciale,* cioè dell' organo (comunemente la mano) preso come sede di paragone costante, ed infine quelle della *vista.*

Nella *Psicologia fisiologica* (da Helmoltz, Wundt ...) si istituiscono esperienze atte a decidere quali proprietà geometriche possano venire acquisite immediatamente dall' una o dall' altra sensazione. Ma nell' interpretare tali esperienze, occorre conoscere profondamente i rapporti fra i concetti a cui le anzidette proprietà si riferiscono, onde si possa separare dalla nozione di un fatto, tutto ciò che non è ad essa indissolubilmente legato.

Allora si arriva ad una prima conclusione generale, cioè che la vista dà, in modo immediato, soltanto le nozioni grafiche e non le metriche. All' opposto invece dalle sensazioni tattili-muscolari, si acquista la conoscenza immediata delle proprietà (metriche) della congruenza, e solo in via subordinata la conoscenza della retta e del piano.

Questa osservazione, implicitamente contenuta in Helmoltz, viene fatta esplicitamente dal Klein.

Si può andare più innanzi tenendo presente la distinzione accennata fra sensazioni tattili-muscolari generali e sensazioni del tatto speciale.

Le prime, fino a che non si sia localizzata per abitudine una sede di paragone, sono incapaci di dare la nozione della congruenza. Il loro contenuto, per quanto riguarda le cognizioni spaziali, si limita alle relazioni più generali inerenti alle linee e alle superficie, relazioni che abbiam detto costituire l'oggetto della teoria del continuo, ed essere comune fondamento delle proprietà grafiche e delle metriche.

Onde: *i tre rami della Geometria, in essa differenziatisi, cioè la teoria del continuo, la Geometria metrica e la proiettiva, avuto riguardo all' acquisto psicologico dei loro concetti fondamentali, appaiono connessi a tre ordini di sensazioni: rispettivamente alle sensazioni generali tattili-muscolari, a quelle del tatto speciale e della vista.*

Non entreremo nelle discussioni che occorrerebbero per giustificare questa conclusione, e dovremo pure arrestarci dinnanzi ai problemi più particolari che quì si riattaccano: come da ciascun gruppo di sensazioni traggano origine i concetti geometrici fondamentali, e come essi si leghino fra loro secondo le leggi logiche e associative, le quali trovano poi la loro espressione nei postulati.

Gli studi che da alcuni anni andiamo facendo intorno a tali argomenti, troveranno miglior posto in altro luogo.

Vogliamo tuttavia richiamare l' attenzione del lettore su questo punto; che vi è differenza tra postulati aventi il loro fondamento in un sol gruppo di sensazioni, e postulati i quali nascono dall' associarsi di sensazioni appartenenti a gruppi diversi. Questi ultimi debbono avere in confronto ai primi un minor grado di evidenza intuitiva.

Si arriva così a spiegare psicologicamente i tentativi, annoverati dalla storia delle Matematiche, per

bandire dai fondamenti della Geometria il *postulato delle parallele* (cfr. art. 6). La sua minore evidenza si spiega osservando che esso è un *postulato d' associazione fra le sensazioni ottiche* da cui scaturiscono i concetti grafici, *e le sensazioni tattili-muscolari* o *meccaniche*, onde hanno origine i metrici. Infatti, se noi cerchiamo di renderci ragione della repugnanza che proviamo a contraddire l' ipotesi di una unica parallela ad una retta data, passante per un punto dato, riconosciamo che essa dipende dal doppio modo onde siamo soliti rappresentarci le rette parallele, in un dato piano: come limiti di due rette che si tagliano, ove il punto comune si allontani indefinitamente in un verso determinato; e come linee *equidistanti*. In questo doppio modo di rappresentazione vi è un fatto d' associazione ottico-meccanica, che riposa appunto sulla sensibile validità del postulato delle parallele.

§ 6. **Il problema filosofico della Geometria.** — Ed ora veniamo a considerare i problemi relativi ai principii della Geometria dal punto di vista filosofico.

Dappoichè l' analisi psicologica rischiara l' oscurità avvolgente le origini dei nostri concetti geometrici, e, spiegandone l' acquisto, permette di riattaccare il senso di necessità inseparabile dai postulati, alle leggi d' associazione del pensiero che presiedono alle condizioni formative di essi, si è condotti logicamente a riconoscere che questa necessità ha soltanto un valore subiettivo. Sicchè non può dirsi *a priori* che la Geometria reale dello spazio fisico debba essere esattamente conforme alla nostra intuizione.

Il dubbio ardito che qui si solleva urta invero con ciò che costituisce una credenza intimamente fissata nel nostro cervello; ma di esso facilmente possiamo renderci ragione, raffigurandoci, con Helmoltz e Clifford, altri esseri pensanti in diverse condizioni spaziali.

Un essere *A* a due dimensioni, che possa liberamente muoversi nel piano, acquisterà la conoscenza della Geometria piana ordinaria; ma alla stessa conoscenza perverrà ancora un essere *B*, mobile sopra una superficie sferica, purchè le dimensioni di questa sieno estremamente grandi rispetto al campo in cui *B* può muoversi, per modo che il detto campo si confonda approssimativamente col piano tangente alla sfera. Così, l'uno e l'altro avranno la nozione d'una linea tracciata sopra la rispettiva superficie, misurante la minima distanza fra due punti, linea che potranno chiamare *retta*. E questa *retta*, estendendo mentalmente le proprietà di essa osservate nella regione accessibile alle loro esperienze, se la figureranno come una linea indefinitamente estesa ed aperta nei due sensi; ma questa figurazione sarà falsa nella Geometria sferica, dove la linea chiamata retta è un circolo massimo, cioè una linea chiusa e di lunghezza finita, sebbene grandissima rispetto a *B*.

Senza dilungarci su altri esempi di simil genere, chiaro apparisce, per analogia, come possano immaginarsi varie *forme spaziali* rispondenti solo in parte ai requisiti che attribuiamo ordinariamente allo spazio, ma pur tali che nell'ambiente a noi accessibile dieno luogo a condizioni geometriche sensibilmente identiche. Se il nostro spazio fisico fosse appunto rispondente ad una di queste forme, la nostra intuizione geometrica sarebbe pur la stessa che oggi possediamo, ma estesa al di fuori del campo delle nostre osservazioni potrebbe condurci a conclusioni assolutamente erronee, come abbiam visto nell' esempio ipotetico relativo all' essere *B*.

Nulla ci dice che così non sia di fatto. Ricoscendo che la Geometria si appoggia sopra una base empirica, dobbiamo pur riconoscere che le proposizioni di questa scienza hanno, come le proposizioni fisiche, una validità relativa ed approssimata; onde, ad assicurarci della loro

esattezza, conviene esercitare un controllo sopra le esperienze elementari che la nostra intuizione ci rappresenta fissate come in un modello ideale, ed istituire ancora, fin dove sia possibile, nuove e più precise esperienze.

Così il problema filosofico dello spazio conduce ad una ricerca fisica. Ma questa ricerca deve essere guidata dall' analisi matematica, cui spetta indicare i fatti meglio verificabili sopra cui si asside l' edifizio geometrico.

Ispirato a tali idee, Helmoltz ha proposto di caratterizzare la Geometria mediante le proprietà fondamentali del movimento dei corpi solidi (astrazion fatta dal tempo). E la questione da lui enunciata ha ricevuto oggi una risposta più precisa e soddisfacente dalla trattazione gruppale di Sophus Lie.

Le proprietà fondamentali del movimento fisico, più precisamente verificabili in un campo dello spazio accessibile all' esperienza, permettono di ritenere valida in esso la Geometria generale prescindente dal postulato delle parallele. Quest' ultimo postulato non ammette una prova sperimentale di esattezza comparabile a quella spettante ai postulati del movimento.

Così la Geometria, detta non-euclidea, acquista un alto interesse filosofico, giacchè essa appare, non soltanto *logicamente,* ma anche *fisicamente* possibile.

Che il postulato delle parallele non sia una conseguenza logica dei primi principii relativi alla retta, al piano e alla congruenza; che esso sia dunque, in questo senso, indimostrabile; nulla dice ancora relativamente alla sua validità fisica. Ma quando si sia osservato che i fatti, costituenti la base di quei primi principii, sono verificabili sperimentalmente in modo assai esatto, mentre il fatto nuovo richiesto per la teoria delle parallele, o richiede una verificazione impossibile nello spazio infinito o si fonda su esperienze meno precise, allora la

questione della Geometria fisica ha fatto un progresso, sebbene nel senso del dubbio.

Questo dubbio, per altro, non può modificare la nostra intuizione geometrica. Così il modello ideale ch' essa ha costruito dello spazio, e che, se pur non esattamente, lo rappresenta con un' approssimazione superiore ad ogni sensibile valutazione d' errore, resta e resterà sempre lo spazio euclideo!

II

§ 7. **Sullo scopo dell' insegnamento secondario.** — Insegnanti chiamati ad educare le menti dei giovani, preparandole a ricevere una più alta coltura, non lasciate di approfondire lo spirito filosofico della vostra scienza: quello spirito di relazione che tutto coordina in una sintesi, e fa brillare sugli umili particolari la grande luce dell' idea generale!

Certo voi non potrete spingere le intelligenze poco destre dei discepoli nelle elevate regioni della critica, non dovrete aprir loro i larghi orizzonti della filosofia scientifica. Ma pur dalle vostre osservazioni più elementari scaturirà una scintilla di quella fiamma che avrete acceso nel pensiero. E l' opera vostra sarà vero ammaestramento ed educazione delle menti; risponderà così al nobile scopo dell' insegnamento secondario.

Una chiara coscienza di tale scopo deve costituire la base di ogni giudizio didattico. Perciò occorre anzitutto distinguere l' obietto della scuola media che è compimento a sè stessa, in ordine ad esigenze tecniche e professionali, da quello della scuola che prepara a studi superiori. Quest'ultima è attuata nel ginnasio-liceo, ed anche, ormai, nella sezione fisico-matematica degli istituti tecnici.

Di essa soltanto vogliamo parlare [1].

E ci uniamo al concetto di chi ritiene *l' insegnamento secondario* debba piuttosto *educare le intelligenze*, che dare una serie di nozioni utili o fondamentali. Il qual concetto, invero, trova poco generali accoglienze, tutti i bisogni della vita pratica suscitando uno sfrenato desiderio di correre rapidamente al fine, e togliendo la chiara visione di quel che importi l' addestramento delle facoltà intellettive.

Eppur l' indugio che fu speso a rendere atti allo studio, sarà più tardi largamente ricompensato!

Ce lo dicono i frutti di quella stessa coltura classica che è oggetto di controversie tanto vivaci. Nella quale, sia detto quì per incidenza, consideriamo come studio essenziale lo studio del Greco, contro cui si appuntano le maggiori obiezioni.

Spesso si proclama l' inutilità di una fatica senza pratico compenso, e più universalmente si rimprovera l' insuccesso d' un insegnamento così presto e facilmente dimenticato. Non si ascolta la voce di protesta affermante che il sentimento del bello, culto supremo dell' anima ellenica, ebbe la virtù di educare e d' ingentilire gli spiriti; meno ancora si riflette come di quella grammatica apparentemente scomparsa dalla memoria, resta pur sempre, acquisto perenne, la nozione di alcune armoniche leggi che presiedono all' atteggiarsi del pensiero nelle lingue.

Se tali criterii ristretti d' immediata utilità dominano i giudizi contro le più alte tradizioni dell' arte e della coltura, qual meraviglia ch' essi s' impongano nel modo di considerare l' insegnamento matematico?

[1] D' altra parte le principali raccomandazioni svolte nel seguito, possono indirizzarsi, forse non inutilmente, anche agl' insegnanti delle Scuole Normali, cui è affidato il nobile compito di preparare i futuri educatori del popolo.

Certo non si discute quì l' utilità delle applicazioni, le quali aprono la via ad altri studi numerosi; ma quell'insegnamento si vorrebbe togliere appunto a coloro che più debbono correggere con esso le imprecise attitudini dell' intelletto. E all' insegnamento stesso, pei giovani cui viene accordato, si assegna un fine male addicentesi al proposito educativo: dare rapidamente molte nozioni di resultati complessi e difficili, sembra ad alcuni il miglior modo di preparare i futuri matematici. Invece poco vale lo studio così spinto innanzi, senza svolgere nelle menti lo spirito logico e di relazione.

Noi stessi nella scuola, abbiamo avuto di ciò ampia conferma.

E però qui insistiamo, esortando specialmente gli insegnanti degli istituti tecnici, a penetrare più addentro nei rapporti delle proposizioni semplici e luminose, anzichè affaticare, con scarso frutto, i discepoli, cogli artifici dei problemi astrusi e complessi.

§ 8. **Sull' insegnamento della Geometria.** — Alla Geometria si concede volentieri un posto speciale nell' insegnamento matematico secondario; sicchè gli stessi giovani cui l' astrattezza dell' Algebra ispira diffidenze ed antipatie, di sovente trovano in essa una ricreazione dilettevole. Invero la Geometria, fra tutte le discipline matematiche, ha il vantaggio di volgersi ad un maggior numero di attitudini, più comunemente sviluppate fra gli adolescenti.

Il puro esercizio logico alletta soltanto qualche intelligenza critica convenientemente coltivata, perchè esige una fatica più intensa e meno consueta. Invece le sensazioni, nella loro infinita varietà di colore e di grado, sono fin dalla nascita la prima sorgente di piacere.

Piace agli spiriti leggeri e non addestrati allo sforzo, la sensazione quasi passiva e mutabile. Ma, a poco a

poco, vincendosi coll' esercizio la penosa difficoltà dell' attendere, si fa più forte il piacere delle sensazioni a cui la mente partecipa in modo attivo, colla fissità del pensiero.

Tra queste è l' osservazione dei fatti geometrici, così capace di suscitare largo interesse in ogni grado di coltura, che il Froebel non dubitò di proporla come divertimento educativo all' infanzia.

Le figure e i modelli, stimolando la curiosità, inducono a considerare le semplici relazioni che loro appartengono, ed incitano a cercare le più riposte; onde il senso logico si addestra coll' esercizio e si rallegra nel successo.

Qualsiasi maestro di Geometria deve tener presente che l' interesse degli allievi si volge ai resultati, tanto più vivace, quanto più essi appaiono espressione di fatti, non evidenti, ma semplici e luminosi. La verifica grafica è attesa dal giovane come la conferma d' una scoperta, quando p. es. gli si è insegnata la costruzione dell' esagono regolare, o gli si sono mostrate le proposizioni sul punto di concorso delle mediane o delle bisettrici d' un triangolo, il teorema dei triangoli omologici, e così via.

Onde l' uso larghissimo di figure e di modelli, ed anche l' effettuazione di vere esperienze geometriche, vale ad accrescere la fiducia nel ragionamento dimostrativo e a farne meglio sentire l' importanza [1].

Questa pratica ha anche un altro vantaggio; dà ai giovani un' idea adeguata del posto che alla Geometria spetta nell' ordine delle scienze. Essi la vedono svolgersi

---

[1] A questo proposito ci sembra utile rilevare l' interesse della accurata *discussione delle figure*, di cui si può forse persuadere i giovani presentando loro qualche divertente paradosso geometrico.

Cfr. W. W. R. Ball, *Récréations et problèmes mathématiques*. Ch. II. 3me édition trad. par Fitz, Patrick. Paris, Hermann, 1898.

in un tempo come scienza logica ed empirica. Dovranno poi assorgere al concetto esatto della sua struttura logica, e comprenderla in uno sguardo generale con largo spirito di sintesi. Perciò occorre che la materia sia sapientemente ordinata; che delle varie proposizioni si cerchino gl' intimi rapporti, e si facciano scaturire spontaneamente dalle intelligenze, addestrate con esercizio graduale.

Il senso dell' armonia guadagnerà, a poco a poco, gli spiriti, suscitando il desiderio illusorio d' un ordine logico assolutamente compiuto, in cui tutto dovrebbe essere definito e dimostrato.

Che tale domanda sia priva di senso, dovrà allora mostrare il maestro. Volgendo l' attenzione del discente sopra il carattere di metodo riduttore che spetta alla definizione e alla dimostrazione, ne desumerà il bisogno di trarre alcune proposizioni e alcuni concetti fondamentali da un' esperienza immediata.

Tutte le proposizioni geometriche, in quanto esprimono fatti, possono essere appoggiate sopra un' esperienza; ma *non tutte le esperienze hanno lo stesso valore dimostrativo,* giacchè in ragione della cresciuta complicatezza si mescola ad esse un crescente elemento d' errore. Al contrario invece *il ragionamento logico più complesso ha come il più semplice una forza probativa assoluta,* non per stabilire un fatto, ma per stabilire una *dipendenza* tra due fatti.

Ecco dunque illuminata tutta l' importanza dello svolgimento logico della Geometria: non soltanto esso permette di *prevedere* ciò che avrà una conferma dalla esperienza; ma fornisce una certezza del resultato più complesso uguale alla certezza accordata alle semplici premesse, la quale è desunta da un' altra esperienza, tanto più sicura, quanto più elementare.

Quì sarà il caso di discutere la natura delle esperienze elementari cui si appoggiano i postulati. Sono

osservazioni immediate, tante volte ripetute e controllate, che si rivelano come già acquisite, *evidenti* all' *intuizione;* ma l' evidenza loro è una visibilità psicologica che non deve esser confusa coll' evidenza logica, quest' ultima riferendosi sempre ad una relazione, *mai* ad un fatto.

Procedendo in quest' ordine di considerazioni, scaturisce il dubbio intorno all' assoluta validità fisica della Geometria. Ma non oseremmo consigliare agl' insegnanti di affacciarlo alla mente dei giovani. Temiamo possa non esser compreso ove non soccorra la scuola filosofica, preparando con qualche nozione discreta del problema della conoscenza. E d' altronde, anche senza spingersi tanto innanzi, ci pare che il fine essenziale dell' insegnamento sia raggiunto, se si riesce a *far comprendere come lo sviluppo logico della Geometria riposi sopra una base empirica, distruggendo la strana illusione per cui i postulati fondati sopra un esperimento immediato, sembrano quasi avere un grado di certezza inferiore ai teoremi, che pur da quelli dipendono.*

Se poi taluno arditamente vorrà sollevare un più alto sguardo ai problemi filosofici che quì si riattaccano, non lasci di avvertire il carattere diverso delle proposizioni verificabili nel campo finito accessibile ai nostri sensi, in confronto al postulato delle parallele che si riferisce allo spazio infinito, ed appare quindi un' osservazione estesa dal nostro stesso intelletto. Ed avverta pure che le affermazioni ad esso sostituibili, relative a dati finiti, riposano sopra esperienze *quantitative* visibilmente approssimate.

§ 9. **Le esigenze didattiche relative all' insegnamento dei principii della Geometria.** — Il modo di trattare gli elementi che risponde al concetto pedagogico sopra accennato, esige forse qualche spiegazione ulteriore. Abbiam detto che vogliamo uno sviluppo razionale ed

empirico in un tempo. Nei principii ci piace che si cominci con una serie di *osservazioni*, presentando i concetti fondamentali come rappresentanti ideali di enti della realtà, ed enunciando i postulati come espressione di fatti elementari. Quindi possono dedursene teoremi a grado a grado più complessi, e alla loro dimostrazione logica si può far seguire la verifica sperimentale. Ma ciò che è empirico si tenga accuratamente distinto da ciò che è logico, sicchè le prime osservazioni enuncino *tutti i postulati* occorrenti; non mai un nuovo dato della intuizione, dimenticato nelle premesse, s' insinui nascostamente nel ragionamento dimostrativo. Questa è la sola, importante, anzi necessaria, *condizione di rigore.*

Altri credono che occorra portare, fin nei primi principii dell' insegnamento geometrico, una critica raffinata, tendente a scomporre, con analisi minuta, tutte le proposizioni fondamentali. E di queste si sforzano d' altra parte a ridurre il numero, tenendo conto di tutte le relazioni di dipendenza logica che una tale critica riesce a scoprire. Credono così di educare meglio lo spirito logico. In realtà ottengono troppo spesso il resultato opposto.

Pensiamo che il discente non ha ancora nessun concetto dello svolgimento d' una scienza logica, e ci renderemo conto dell' impressione penosa ch' egli proverà innanzi ad un tal modo d' insegnamento. Il maestro ha di mira tante relazioni riposte e lontane che a lui sono sconosciute; il maestro ha il concetto di una logica formale indipendente dalla materia che ne costituisce il contenuto; ma come potrebbe giungere a questo concetto astrattissimo chi non ebbe ancora esempio di una materia logicamente ordinata?

Alla sua mente si presentano per la prima volta enunciate in modo esplicito, proposizioni che egli ha ritenuto sempre come evidenti; di alcune gli si dice di

accoglierle come esprimenti dei fatti già a lui familiari, ma di altre, della stessa natura, gli si offre una dimostrazione che sembra quasi oscurare col dubbio la limpida certezza.

In tali discussioni si riuscirebbe soltanto ad affaticare ed allontanare colla noia dallo studio, menti pur disposte ad apprendere, quando si sappia suscitarne l'interesse, aprendo dinnanzi agli occhi il campo largo dei fatti!

Con quale vantaggio?

In obbedienza ad un criterio teorico, che non ha alcun valore imperativo ed è anche teoricamente discutibile; perchè infine, considerata la Geometria nel suo aspetto di scienza fisica, i rapporti logici fra i postulati nulla tolgono alla perfezione del loro sistema, la quale dall'intima concordanza delle parti riceve anzi nuova conferma.

Insistiamo recisamente su questo punto essenziale: *nell'insegnamento della Geometria si può e si deve tener conto della condizione di rigore, enunciando come postulato tutto ciò che si trae immediatamente dall'osservazione; ma per il rigore non importa affatto cercare l'indipendenza dei postulati, ed anzi didatticamente è preferibile trarre dall'osservazione un maggior numero di principii evidenti.*

Nè di più grande interesse ci sembra il separare minutamente, nelle varie proposizioni logiche, l'affermazione d'un fatto che alla mente si presenta come il resultato d'un'unica esperienza elementare; anzi didatticamente ci par meglio che esso venga enunciato in modo conciso, purchè esatto e completo. Così il rigore matematico può essere pienamente raggiunto senza affaticare il discente.

E quando le difficoltà dei principii saranno vinte, e la suprema armonia della scienza geometrica apparirà chiara nell'ordine dei resultati e nei loro intimi rapporti, sapientemente posti in luce, allora, come abbiam detto,

il maestro potrà opportunamente considerare la Geometria nell'ordine delle scienze, spiegandone la mirabile struttura.

Così egli avrà contribuito, secondo il suo debito, a richiamare l' attenzione dei giovani sopra un punto della generale teoria della conoscenza; in loro suscitando il desiderio di assorgere analogamente, da ogni ramo dello scibile, a quest' ordine di considerazioni, pur troppo lasciate fuori della coltura nel nostro paese.

Le nozioni acquisite nel campo dei problemi relativi ai principii della Geometria, e lo spirito filosofico accresciuto da tali studi, varranno in tal modo a rendere più utile ed efficace l' opera degli educatori delle menti.

ARTICOLO SECONDO

« **Sui concetti di retta e di piano** » di Ugo Amaldi a Bologna.

Le questioni relative al modo, scientificamente e didatticamente migliore, di introdurre nella Geometria elementare le nozioni di *retta* e di *piano* si riattaccano direttamente alle moderne ricerche sui fondamenti della Geometria. Ma non è da queste che io intendo qui prender le mosse. Mi propongo, piuttosto, il compito assai più modesto di esporre in via storica quelle definizioni di *retta* e di *piano*, che tennero successivamente il campo nei trattati e nella scuola, e di far discendere, da codesto breve esame, che nella serie delle deduzioni geometriche conviene assumere le nozioni di *retta* e *piano*, come nozioni primitive, caratterizzandole con un opportuno sistema di postulati.

Questi postulati (se ci limitiamo a considerare le prime proprietà *grafiche*) si riferiscono alle relazioni di appartenenza fra *punti*, *rette* e *piani*; alle proprietà *lineari* della retta e *superficiali* del piano, nonchè alla proprietà dello *spazio* di avere *tre dimensioni*.

In quest' ultima parte del mio scritto (aggiunta all' ultimo momento per desiderio espresso dal professor Enriques) non ho tuttavia la pretesa di avere dato un completo assetto ad una fondazione logica della Geometria per via elementare. Piuttosto ho voluto abbozzare i principali indirizzi che potrebbero condurre allo scopo, guidando ad una conveniente introduzione dei concetti di *segmento*, *angolo* e *diedro*, i quali si riattaccano appunto alle nominate proprietà lineari della retta, superficiali del piano e delle tre dimensioni dello spazio.

Mi sono giovato, in modo quasi esclusivo, dei seguenti scritti, che, ad evitare citazioni troppo minute e troppo frequenti, enumero qui insieme, in sul principio:

Houël — *Essai critique sur les principes fondamentaux de la Géométrie* - Paris.

Schotten — *Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts* - Eine vergleichende Planimetrie - I u. II Bd. Leipzig 1890-93.

Veronese — *Fondamenti di Geometria* - Padova 1891.

Bettazzi — *Sulla definizione della linea retta* - Per. di Mat. 1892.

Duhamel — *Des Méthodes dans les Sciences de raisonnement* - II Partie. Paris 1896.

Killing — *Einführung in die Grundlagen der Geometrie* - II Bd. Paderborn 1898.

Ho poi avuto sott' occhio il manoscritto dell' articolo sui « Principii della Geometria » che il prof. Enriques sta preparando per la *Enciclopedia matematica*: da codesto manoscritto inedito ho desunto il contenuto dei §§ 5, 6, 7.

§ 1. **Varie definizioni della retta**. — Euclide definisce la *retta* come la linea « *che giace ugualmente*

rispetto ai suoi punti » [1]. Codesta definizione fu interpretata assai variamente: taluno pensò doversi intendere nel senso che, fissati due punti qualsivogliano della retta, questa non vi si possa adagiare in più modi differenti: ma accettata siffatta interpretazione, riuscirebbe superfluo l' assioma V: *Due rette non comprendono spazio alcuno.* Altri invece riferisce codesta uguaglianza di giacitura alle parti diverse della retta, e intende che, preso un qualsiasi segmento di retta, in tutta la estensione di questa vi sono segmenti eguali a quello: ora questa proprietà non *definisce* la retta, in quanto essa si applica egualmente al cerchio e all' elica.

I più, infine, interpretano, dicendo che « la retta è divisa in due parti uguali da ogni suo punto. » A questa interpretazione si può obbiettare quello che obbiettammo alla interpretazione antecedente.

Ma anzichè cercare nella definizione euclidea l'enunciato di una ben determinata proprietà geometrica, giova forse il ricordare che gli antichi nel sistema geometrico assegnavano alle definizioni un ufficio essenzialmente diverso da quello che noi da esse richiediamo: alle definizioni attribuivano quasi la parte di descrizioni, mentre raccoglievano nei *Postulati* e nelle *Nozioni comuni* quelle proprietà geometriche degli enti, già definiti, che dovevano essere immediatamente applicate nelle successive deduzioni. Così EUCLIDE, dopo avere enunciato la sua definizione, *postula* che sia possibile il condurre da qualsivoglia punto a qualsivoglia punto

(1) Il testo greco (ed. HEIBERG) è: Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥ τις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

Nella varietà stessa delle traduzioni che ne furono proposte si rispecchia la oscurità della definizione. PROCLO nulla dice in proposito. Il VIVIANI traduce: « *La linea retta é quella che si distende ugualmente fra' suoi punti* ».

una retta, ed afferma, tra le *Nozioni comuni*, che due linee rette non comprendono spazio alcuno.

Fu proposto di definire la *retta* come *quella linea che conserva in ogni suo punto una direzione costante.*

Questa definizione richiede che si assuma come nozione primitiva quella di *direzione* rispetto a due punti, indipendentemente dalla retta. In questo senso ha svolto notevoli considerazioni lo SCHOTTEN nella sua già citata *Planimetria comparata* (1); egli osserva, col BOLZANO, che, ponendo due punti, si mettono in evidenza due concetti, o *predicati*: *direzione* e *distanza*; e, dati due punti, chiama *retta*, passante per quelli, la classe dei punti che associati ai dati danno la medesima direzione o l' opposta. Questa definizione soddisfarebbe alle esigenze del rigore, qualora fosse caratterizzata con postulati l' eguaglianza di direzione. In proposito si veda uno scritto del DIXON (2).

Il secondo *predicato* della coppia di punti, cioè la *distanza*, può essere posto a base di un' altra definizione di retta. Il LEGENDRE definì la *retta* come « *il più corto cammino tra due punti* » (3) e questa definizione ebbe il medesimo largo successo degli « *Éléments de Géométrie* ». Ma sono senz' altro manifesti i difetti che essa presenta, se non è associata ad un opportuno sistema di postulati, i quali determinando, indipendentemente dalla retta, il concetto di lunghezza, rendano possibile il confronto, rispetto alla lunghezza, di linee diverse e stabiliscano l' esistenza e l' unicità del *minimo*. Un siffatto sistema fu stabilito dal BETTAZZI (4), il quale, partendo, in so-

---

(1) II Band. - S. 4 u. ff.

(2) *The foundations of geometry* - Cambridge. 1891.

(3) Questa definizione si fa risalire ad ARCHIMEDE: ma il KILLING sostiene che l' indicata proprietà non ha in ARCHIMEDE ufficio di definizione.

(4) *Il concetto di lunghezza e la retta* — *Ann. di Mat.* - 1892.

stanza, dalla nozione di *coppia di punti*, rigidamente connessa e invertibile, giunse a dare così al concetto del LEGENDRE una formulazione logica rigorosa.

Ricordiamo, da ultimo, la definizione, usata dal LEIBNIZ e dallo STAUDT, per cui la *retta* è considerata come la *linea che resta immobile quando si fa ruotare intorno a due suoi punti tenuti fissi.* Questa definizione presuppone la nozione di *movimento.*

§ 2. **Varie definizioni del piano.** — Il *piano* in EUCLIDE è definito come *la superficie che giace egualmente tra le sue rette* (1), parole che il CRELLE (2) dice « completamente indeterminate e per lo meno oscure ». Si ripresenta qui quella stessa varietà di interpretazioni, che trovammo per la definizione di retta: di più qui nasce questione sulla moltitudine delle rette, che la definizione presuppone giacenti nel piano (3).

Largo favore ottenne la definizione (che il CRELLE attribuisce a ROBERT SIMSON e altri fa risalire ad ERONE) per la quale il *piano è caratterizzato dalla proprietà di contenere per intero ogni retta di cui contenga due punti.*

Il GAUSS (4) osservò che questa definizione include un postulato (o un teorema), in quanto si ottiene già il piano, proiettandone una retta da un punto ad esso appartenente. Il CRELLE (5) si propose di assumere a definizione di piano la costruzione or ora indicata, cercando poi di dimostrare per una parte, che la superficie ottenuta è indipendente dal punto e dalla retta, scelti a base della costruzione, e per l' altra, che una retta avente comuni

(1) Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν. ἥ τις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

(2) *Zur Theorie der Ebene.*

(3) *Killing.* — l. c.

(4) Lettera a BESSEL. Göttingen, 27 luglio 1829.

(5) *Zur Theorie der Ebene*, Crelle 's Journal, XLV - 1845.

con quello due punti vi giace per intero. Ma le deduzioni del CRELLE non sono rigorose.

Alla definizione ora indicata possiamo ravvicinare la definizione, che il CRELLE attribuisce al FOURIER, per la quale il piano è dato dall'*insieme delle rette ortogonali in un punto ad una retta data.* Il CRELLE *(Zur Theorie der Ebene)* dichiara di trovare codesta definizione preferibile alle altre, ma di non essere riuscito a stabilire in modo rigoroso i teoremi, dai quali essa dipende. Invero la nominata definizione presuppone la nozione di rette ortogonali, indipendentemente da quella di piano. A questa difficoltà si propose di ovviare il DEAHNA (1); egli, presupponendo stabilite le nozioni di retta e di sfera, ammette che in ogni movimento dello spazio, che lascia fermo un diametro della sfera, i punti di questa si muovano, descrivendo delle linee chiuse (cerchi). Ciascuno di questi cerchi, in ogni movimento dello spazio intorno al diametro prefissato, scorre su sè stesso, e uno di essi divide la sfera in due parti congrue. Dicesi allora *piano* l' insieme delle rette che dal centro della sfera proiettano i punti di questo cerchio.

Conviene per altro notare che il KILLING ha mostrato come sia possibile definire l' angolo retto indipendentemente dal piano, e dar quindi, ricorrendo al movimento, una formulazione rigorosa alla concezione del FOURIER (2).

Recentemente la generazione del *piano* per mezzo del *fascio dei raggi* proiettanti da un punto O i punti di una retta r fu ripresa dal VERONESE (3).

Egli definisce, indipendentemente dal piano, come *parallele* due rette *opposte* (simmetriche) rispetto ad un punto, e quindi assume il postulato: *Due rette parallele*

(1) *Demonstratio theorematis, esse superficiem planam* ecc. — Marburg 1837.

(2) *Einführung....* II Bd. S. 183 u. ff.

(3) *Fond. di Geom.* — Cfr. anche: VERONESE-GAZZANIGA, *Elementi di Geometria*. Padova 1897.

sono opposte rispetto al punto di mezzo di ogni loro segmento trasversale. Costruisce così il piano come insieme delle rette proiettanti da un punto O i punti della retta r, aggiungendovi la parallela per O ad r: e dimostra quindi il teorema fondamentale, ricorrendo alle proprietà di congruenza di segmenti e di coppie di raggi.

Accanto alle definizioni di *piano* ricordate sin qui, per le quali questa nozione si riattacca a quella di *retta*, ne furono proposte altre, sebbene in minor numero, che subordinano la nozione di *retta* a quella di *piano*.

Così il Leibniz (1) considerò il *piano* come la *superficie che divide lo spazio in due parti congrue* e la *retta* come *la linea che divide il piano in due parti congrue*.

Queste definizioni richiedono che si assumano come nozioni primitive quelle di *punto* e di *equidistanza* e che si determinino, con un opportuno sistema di postulati, le *simmetrie* che esistono sulla retta, nel piano e nello spazio (2).

§ 3. **Sviluppi di Bolyai e Lobatschefskij.** — Un particolare interesse scientifico hanno le definizioni di *piano* e di *retta* del Bolyai e del Lobatschefskij. La formulazione logica dei principî della Geometria sulla base di codeste definizioni non è ancora stata data, nè io intendo qui di recare alla soluzione di codesto problema alcun contributo. Io mi restringerò ad abbozzare, nel presente §, *sotto forma puramente intuitiva* (3), la serie di osservazioni, con le quali sulle tracce del Bolyai e del Lobatschefskij (4), si possono introdurre le forme *piano*

(1) *Leibnitzens math. Schriften.* G. J. Gerhardt. Berlin 1845.

(2) Cfr. Brodèn, *On geometriens principien.*

(3) Tolte poche modificazioni seguo il Frischauf. — *Elemente der absoluten Geometrie.* Lepzig, 1876.

(4) Il Frischauf nota che le trattazioni di quei due geometri sono « quasi coincidenti ».

e *retta*, e stabilirne le proprietà fondamentali. Notiamo che la concezione, di cui qui è fatto parola, si fa risalire al Leibniz [1].

Assumiamo come nozione primitiva quella di *coppia di punti, invariabilmente connessa ed invertibile,* quale è suscitata in noi dall' idea di coppie di punti (materiali) appartenenti a corpi sensibilmente rigidi: e sia stabilito in tutta la sua estensione il concetto della *congruenza*, come è dato dal *movimento* dei corpi rigidi.

Due coppie di punti AB, CD si diranno *congruenti,* quando esiste un movimento dello spazio che sovrappone A a C e B a D: esiste allora anche un movimento che sovrappone A a D e B a C. Si esprime lo stesso fatto, dicendo che la *distanza* di A e B è eguale alla *distanza* di C e D. In particolare si dice che due punti B e C sono *equidistanti* da un terzo punto A, se le coppie AB, AC sono congruenti.

Dati due punti O ed A, dicesi *sfera di centro O e passante per A* l' insieme dei punti M, tali che A ed M siano equidistanti da O. La coppia OA (od ogni altra coppia a quella congruente) dicesi anche *raggio* della sfera costrutta. In ogni movimento dello spazio che lascia fermo il punto O la sfera scorre su sè stessa.

La sfera divide lo spazio in due regioni, l' una costituita di *punti esterni,* l' altra di *punti interni,* e tali che non si può passare con un tratto continuo da un punto interno ad uno esterno, o viceversa, senza attraversare, almeno in un punto, la sfera stessa. Dei *punti esterni* dicesi anche che hanno dal centro *distanza maggiore* del raggio; dei *punti interni,* che hanno dal centro *distanza minore* del raggio.

[1] *Uylenbrök* « Christiani Hugenii aliorumque saeculi XVI virorum celebrium exercitationes mathematicae et philosophicae ». Hagae MDCCCXXXIII. Fasc. II.

Le sfere, che hanno un medesimo centro O, non possono avere a due a due nessun punto comune. Il loro insieme *(fascio)* è *ordinato* e *continuo*. Il primo di questi caratteri dipende dal fatto che, nel fascio, se una sfera S_1 è interna ad una sfera S e una terza sfera S_2 è interna ad S_1, si ha ancora che la S_2 è interna alla S; il secondo sta in relazione con la continuità dello spazio.

Due sfere S ed S', di centro O ed O' rispettivamente, e tali che la seconda abbia dei punti interni ed esterni alla prima, si intersecano in una linea *continua* e *chiusa* k, che dicesi *cerchio*. In ogni movimento dello spazio, che lascia fermi i punti O ed O', il cerchio scorre su sè stesso: ed esistono due ben determinati movimenti, fra loro *inversi*, per ciascuno dei quali O ed O' restano fermi, ed ogni punto di k, dopo aver descritto l' intero cerchio, ritorna nella posizione primitiva.

Se due sfere S, S' hanno due punti A, B in comune, si può passare da A a B per mezzo di due archi di curva, continui e appartenenti alle due sfere: cioè le due sfere si intersecano in un *cerchio*, passante per A e per B.

Siano due *terne* ABC, $A'B'C'$, tali che le coppie AB, BC, CA che si possono formare coi punti della prima siano ordinatamente congruenti alle coppie $A'B'$, $B'C'$, $B'A'$, formate coi punti della seconda: *le due terne sono allora congruenti*. Si muova infatti la seconda terna nello spazio fino a far coincidere, come è possibile, A' con A e B' con B. Poichè, in questa nuova posizione, la coppia AC è congruente alla AC', e la BC alla BC', le sfere di centro A, B e raggio AC, BC rispettivamente passano anche per C', onde il cerchio, loro comune intersezione, contiene i due punti C e C' ed è quindi possibile, con due diversi movimenti, sovrapporre C' a C, lasciando fermi A e B.

Assegnato sopra un cerchio k un punto A, esiste su quello un punto B ed uno solo, tale che i due archi

AB, in cui il cerchio resta così diviso, siano congruenti [1]. Il punto B dicesi *opposto* di A su k.

Se due sfere S ed S', di centri O ed O' rispettivamente, si intersecano in un cerchio k, ciascuna di esse è da k divisa in due *regioni sferiche,* delle quali una è costituita di tutti punti interni, l' altra di tutti punti esterni rispetto all' altra sfera. Chiamiamo Z_1, Z_2 le due regioni, in cui S è divisa da k, o, come diremo, le due *regioni* di S, relative a k, e siano la prima interna, la seconda esterna ad S'. Se S_1' è una sfera di centro O', distinta da S' e interna ad essa (o, come si può dire, di raggio minore) e la S_1 interseca S in un cerchio k_1, questo cerchio, dovendo essere costituito di tutti punti appartenenti ad S e interni ad S', apparterrà per intero alla regione Z_1. Se allora nel fascio delle sfere concentriche ad S' consideriamo l' insieme delle sfere intersecanti S, in relazione con l' ordine e la continuità di questo, risulta ordinato e continuo anche l' insieme *(fascio)* dei cerchi, intersezioni di S con le sfere considerate. Esisterà allora nella regione Z_1 della sfera S un punto X ed uno solo, *interno* a tutti i cerchi del fascio considerato. La sfera Σ_1 di centro O' e passante per X non può aver comune con S un ulteriore punto, perchè in tal caso intersecherebbe S secondo un cerchio passante per X e appartenente al fascio, di cui ciascun cerchio deve, invece, contenere X al suo interno. Tutti i punti di Σ_1 distinti da X sono esterni ad S. Ogni sfera di centro O' ed interna a Σ_1 non ha con S alcun punto comune.

Analogamente si costruisce una sfera Σ_2 di centro O', maggiore di S' e avente in comune con S un punto Y ed uno solo: ogni punto di S, diverso da Y è interno a Σ_2: tutte le sfere di centro O' e maggiori di Σ_2 non hanno alcun punto comune con la S.

---

[1] Cfr. art. 4.°

Le due sfere Σ_1, Σ_2 diconsi *tangenti* ad S: X e Y sono i rispettivi *punti di contatto.*

In ogni movimento dello spazio che lascia fermi i punti O ed O', restano fermi anche i punti X e Y: se, infatti, si muovessero, descriverebbero due cerchi che dovrebbero essere comuni ad S e a Σ_1, ad S e a Σ_2 rispettivamente.

Siano dati nello spazio tre punti A, B e C. Se consideriamo l' insieme dei movimenti dello spazio che lasciano fermi i punti A e B, il punto C o rimane fermo in ciascuno di essi, o in ciascuno di essi si muove sopra un cerchio k, intersezione delle due sfere di centro A, B e raggio AC, BC rispettivamente. *Escluso il primo caso*, ciascun movimento dell' insieme considerato fa descrivere ai singoli punti di k archi di cerchio congruenti (e in uno stesso verso). Se quindi in un particolare movimento dello spazio, che lascia fermi A e B, anche il punto C sta fermo, codesto movimento farà descrivere un arco nullo a ciascun punto di k, cioè lascierà fermi tutti i singoli punti di codesto cerchio.

Ora vogliamo dimostrare, che il movimento, che lascia fermi A, B e tutti i punti del cerchio k, si riduce al movimento *identico*, che lascia fermi tutti i punti dello spazio.

Consideriamo infatti la sfera S di centro A e passante per C: essa conterrà per intero il cerchio k. Sulla S, in *ogni* movimento che lascia fermi A e B, restano fermi due punti X, Y (punti di contatto con S delle sfere di centro B e tangenti a quella), i quali cadono nelle due diverse regioni sferiche di S relative a k. Se h è il cerchio intersezione con S di una sfera avente il centro in un punto H di k, questo ultimo cerchio intersecherà h in due punti M, N. Nel movimento considerato, che lascia fermi A, B e tutti i punti di k (in particolare M ed N) o tutti i punti di h restano fermi o i due archi MN di h vengono

scambiati fra loro. Se si verificasse quest' ultimo caso dovrebbero, nel movimento considerato, essere tra loro scambiate le due regioni di S, relative a k, e ciò non può accadere, giacchè ciascuno dei punti X, Y rimane fermo. Si conclude così che tutti i punti della sfera S restano fermi. Ma allora, considerata un' altra sfera qualsivoglia S', che abbia il suo centro in B e intersechi in un cerchio k' la S, possiamo applicare ad S' lo stesso ragionamento applicato dianzi ad S e concluderne che anche tutti i punti di S' stanno fermi. Così, successivamente, si dimostra che nel movimento considerato restano fermi tutti i punti dello spazio, onde è lecito enunciare il seguente

Lemma — *Se in un particolare movimento* (non identico), *che lascia fermi due punti A e B, resta fermo un terzo punto C, questo punto resta fermo in ogni movimento, che lascia fermi A e B.*

Premesse queste osservazioni, fissiamo due punti O ed O' qualsivogliano dello spazio, e consideriamo la sfera S di centro O e passante per O' e la sfera S' di centro O' e passante per O.

Poichè S ha punti interni ad S', ed S' ad S, le due sfere si incontreranno in un certo cerchio k: di più tutte le coppie di sfere S_1, S'_1 di centro O ed O' rispettivamente e di raggio eguale, ma maggiore di OO', avranno a comune un cerchio, giacchè ogni punto di S interno ad S' è pure interno ad S_1', e ogni punto di S' interno ad S è pure interno ad S_1'. Infine delle coppie di sfere di centro O ed O' e di raggi eguali, ma minori di OO', consideriamo quelle che hanno un cerchio comune. Nei due fasci esisteranno due sfere Σ, Σ', di raggi eguali, tra loro tangenti, e tali che le sfere dei due fasci interne a Σ e Σ', rispettivamente, non hanno alcun punto in comune.

Il sistema π di tutti i cerchi così ottenuti (aggiuntovi il punto di contatto di Σ e Σ') dicesi *piano:* in

altre parole *dicesi* **piano** *il luogo dei punti dello spazio equidistanti da due punti* (fondamentali).

Il *piano* divide lo spazio in due parti, delle quali la prima contiene quei punti che hanno da O una distanza minore che da O', la seconda i punti che hanno da O' una distanza minore che da O. Dall' una all' altra non si può passare con un tratto continuo, senza attraversare il piano.

Se muoviamo nello spazio l' insieme di tutte le sfere indicate dianzi, in modo che i punti O ed O' si scambino fra loro, il piano π vien sovrapposto a sè stesso.

Dati due punti A e B, consideriamo le due sfere di centro A e B e raggio AB, BA rispettivamente; esse avranno a comune un certo cerchio h: su h si prendano due punti P e Q *opposti*. Le terne APQ, BPQ, le cui coppie sono a due a due ordinatamente congruenti, saranno congruenti: quindi è possibile, tenendo fermi A, B scambiare P e Q; ne discende che sul cerchio k intersezione delle due sfere di centri P e Q rispettivamente e passanti per A (e quindi per B) i due punti A e B sono *opposti*.

Si costruisca allora il piano, luogo dei punti equidistanti da P e Q, al quale apparterranno, in particolare, i punti A e B: indichiamo con π il sistema fondamentale di cerchi del piano considerato. Dico che nel movimento, dianzi indicato, che lasciando fermi A e B, scambia P e Q, restano fermi su ciascun cerchio di π due punti.

Infatti se è k' un cerchio di π diverso da k ed M un suo punto, che nell'accennato movimento dello spazio non resti fermo, questo dopo il movimento sarà in M': se R ed S sono i due punti, che dividono per metà i due archi MM' di k', gli archi RM ed SM vengono dal movimento indicato sovrapposti a RM' ed SM' rispettivamente: dunque P e Q restano fermi. Resta fermo ancora

il punto di contatto di Σ e Σ'. Esiste quindi, nel piano π considerato per A, B, una linea r, la quale passa per questi punti e *gode della proprietà che tutti i suoi punti restano fermi nel movimento che, lasciando fermi A e B,* inverte *il piano* π. Poichè siffatto movimento non è *identico*, risulta dal Lemma dato a pag. 44 che i punti di r restano fermi *in ogni movimento dello spazio, che lascia fermi A e B.*

Ma osserviamo che il movimento, che, lasciando fermi A e B, inverte il piano π, scambia fra loro le due parti, in cui quel piano divide lo spazio: cioè scambia ogni punto giacente da quella parte di π dove cade P con un punto giacente dalla parte opposta. Ne discende che nel movimento considerato nessun punto dello spazio resta fermo fuori del piano π: onde si conclude che la linea r è il luogo dei punti dello spazio, che restano fermi in ogni movimento che lascia fermi A e B.

Il luogo dei punti dello spazio che restano fermi in ogni movimento, che lascia fermi due punti A e B, dicesi retta AB.

La *retta* in relazione col sistema dei due fasci di sfere risulta *ordinata in modo continuo*: si ha quindi che ogni punto della retta la divide in due parti, a ciascuna delle quali si dà nome di *semiretta* o *raggio*. Un raggio si designa, indicandone l' origine ed un punto.

La retta è determinata da due suoi punti qualsivogliano.

La retta AB, infatti, è definita come luogo dei punti che restano fermi in ogni movimento, che lascia fermi A e B. Fissato uno qualsivoglia dei movimenti soddisfacenti a codesta restrizione, in esso resterà fermo insieme con A e B un altro qualsiasi C dei punti della retta. Allora, poichè esiste un movimento che lascia fermo, insieme con A e C, anche B, avremo, per il Lemma, che in ogni movimento, che lascia fermi A e C,

resta fermo anche il punto B. Se ne conclude che le rette AB, AC coincidono e, più in generale, che sussiste il teorema enunciato dianzi.

Diremo *coppia di raggi* l' insieme di due raggi uscenti da un punto O (*vertice della coppia*) e invariabilmente connessi. Due coppie di raggi ab, $a'b'$ si diranno congruenti, quando esiste un movimento dello spazio, che permette di sovrapporre il vertice dell' una al vertice dell' altra e i due raggi dell' una rispettivamente ai due raggi dell' altra. Ammetteranno *l' invertibilità* della coppia.

Date due coppie *congruenti*, ab di vertice O, $a'b'$ di vertice O', se A, B, A', B' sono punti di a, b, a', b' rispettivamente, tali che le coppie di punti OA, OB siano congruenti ordinatamente ad $O'A'$, $O'B'$ si verifica col movimento che le due terne OAB, $O'A'B'$ sono congruenti e, quindi, sono congruenti le coppie di punti AB, $A'B'$ e le coppie di raggi AO, AB ed $A'O'$, $A'B'$; BO, BA e $B'O'$, $B'A'$.

Dalla generazione del piano data a pag. 44 possiamo ora dedurne un' altra.

Definita nel piano π la retta r, il piano può immaginarsi generato da quella, nel movimento dello spazio che lasciando fermi i punti P e Q, sovrappone A a sè stesso. In altre parole il piano può essere generato per mezzo della costruzione seguente: Dati un cerchio e due punti A e B di esso, tra loro opposti, i punti C e D dividano per metà, rispettivamente, il segmento di retta AB e uno degli archi di cerchio AB.

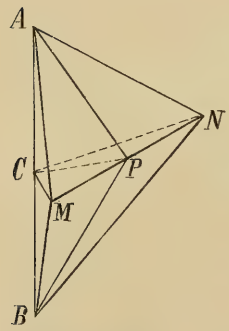
La semiretta CD, nel movimento dello spazio che lascia fermi i punti A, B e sovrappone a sè stesso il cerchio ADB, genera il *piano*. La retta AB dicesi *perpendicolare* nel punto C al piano.

La coppia di raggi CD, CB è in ogni posizione del raggio CD congruente alla coppia CD, CA: e, reciproca-

mente, se per C passa un raggio CE tale che la coppia CB, CE sia congruente alla coppia CA, CE, il raggio CE segna una delle posizioni successivamente assunte dal raggio CD nel suo movimento generatore del piano: quindi il raggio CE appartiene per intero al piano.

Dopo ciò, possiamo dimostrare agevolmente il teorema fondamentale del piano: *Una retta, che ha in comune con un piano due punti, vi giace per intero.*

Sia r una retta avente in comune con un piano π due punti M, N. Considerata la perpendicolare a π in un suo punto C qualsivoglia, siano A e B due punti di questa, giacenti da bande opposte del piano, e tali che AC sia congruente a CB. Se P è un qualsivoglia punto della retta MN, basterà far vedere che appartiene a π il raggio CP, o, ciò che è lo stesso, che la coppia di raggi CA, CP, è congruente alla coppia CB, CP. Perciò osserviamo che dalla congruenza delle terne ACM, BCM ed ACN, BCN risulta che AM, AN sono congruenti a BM, BN rispettivamente. Allora le due terne AMN, BMN, le cui coppie sono ordinatamente congruenti, sono congruenti ed hanno congruenti le coppie di raggi MA, MP ed MB, MP. Se ne conclude la congruenza delle terne AMP, BMP e quindi quella delle terne ACP, BCP: onde infine si ha che le coppie di raggi CA, CP e CB, CP sono congruenti, come appunto volevamo dimostrare.



Da questa proposizione fondamentale risulta che l'intero piano si ottiene assegnando due sue rette a e b, che si incontrino in un punto O e proiettando i punti di a da un punto B (distinto da O) di b, e i punti di b da un punto A (distinto da O) di a.

Nella generazione di piano assegnata dapprincipio hanno un ufficio tutto particolare i punti fondamentali, (centri dei due fasci di sfere). Qui vogliamo dare un cenno del modo, in cui si potrebbe dimostrare *la indipendenza della generazione del piano dai due punti fondamentali.* Siano P e Q i punti fondamentali per la costruzione di un piano π e sia k un cerchio di π, intersezione di due sfere di raggi eguali e di centri P e Q rispettivamente. Scelto fuori di π un punto R qualsivoglia, dico che esiste un punto S, tale che, scelti a punti fondamentali R ed S, si ottiene, con la costruzione assegnata, precisamente il piano π. Se infatti A, B, C sono tre punti qualsivogliano di k, si può dimostrare che le tre sfere di centro A, B, C rispettivamente e passanti per R, si incontrano in un ulteriore punto S, unico e determinato. I punti A, B, C sono, ciascuno, equidistanti da R e da S: quindi appartengono al piano π', definito (come luogo dei punti equidistanti) da R e da S. Ma, per la proposizione fondamentale, π' conterrà ancora le rette AB e BC e tutte le rette ottenute proiettando da A i punti di BC e da B i punti di AC. Ma codeste rette appartengono anche a π ed anzi, come abbiamo osservato, esse generano l' intero piano π. Dunque π e π' coincidono, e si può concludere che per ogni punto dello spazio fuori di un piano, esiste un altro punto (*simmetrico* di quello rispetto al piano), che si può assumere insieme col dato a punto fondamentale nella costruzione del piano.

Vogliamo da ultimo far vedere che *tre punti, non allineati, appartengono ad un piano.*

Siano A, B, C i tre punti. Nel modo indicato sopra, costruisco per A e B un piano π: se il punto C non appartiene ad esso, consideriamo il simmetrico C'' di C rispetto a π. Si può in due modi sovrapporre C'' a C con un movimento dello spazio che lascia fermi A e B.

In questi due movimenti il punto C descrive due archi di cerchio, ciascuno dei quali, congiungendo due punti da bande opposte di π, lo incontra in un punto. Sia C_1 uno qualsivoglia dei due punti così ottenuti: poichè le terne ABC_1, ABC sono congruenti, è possibile con un movimento dello spazio, che lascia fermi A e B, (*inverso* di uno di quelli considerati dianzi) sovrapporre C_1 a C. Eseguendo codesto movimento su π, condurremo questo piano a passare, oltre che per A e B, anche per C.

L' *unicità* del piano passante per A, B, C discende dalla proposizione fondamentale del piano [1].

§ 4. **Postulati di appartenenza.** — Passate così in esame le principali definizioni successivamente proposte per le forme fondamentali *retta* e *piano*, osserviamo che esse tutte esigono siano posti in antecedenza i principî di *congruenza* (o eguaglianza di direzione) o di *movimento*, indipendentemente dai concetti di *piano* e *retta*. Ora tutto ciò è bensì possibile, ma richiede si parta da concetti primitivi meno semplici di quelli che si vorrebbero definire. Di qui risulta la convenienza, logica e didattica a un tempo, di introdurre la *retta* e il *piano* quali enti primitivi, dotati di proprietà geometriche esplicitamente postulate.

Pertanto, muovendo dal primo concetto fondamentale di *punto* (concetto capace di varie determinazioni il cui insieme costituisce lo *spazio*), si assumeranno senza definizione i concetti di alcune *particolari classi di punti*,

[1] Agli sviluppi che qui abbiamo abbozzato vanno ravvicinati quelli del Cassani (*Nuove proposte intorno ai fondamenti della Geometria*. Giorn. di Battaglini. XV. 1897) il quale definisce la retta come luogo dei punti equidistanti dai tre punti di una *terna regolare* (equilatera) e il piano come superficie generata da « una retta che si muova intorno a un punto sopra un circolo, appoggiandosi sempre al medesimo ».

denominate *retta* e *piano,* attribuendo a loro, anzitutto, le seguenti *proprietà di appartenenza:*

I. *Due punti appartengono ad una retta.*

II. *Tre punti, non in linea retta, appartengono ad un piano ben determinato.*

III. *Un piano contiene la retta determinata da due qualsivogliano dei suoi punti.*

Ma a costituire la Geometria in sistema logico deduttivo non bastano codesti tre postulati; è necessario postulare ancora le prime proprietà *lineari* della retta e *superficiali* del piano, relative alle loro divisioni in parti: in altre parole, è necessario richiedere per postulati le proprietà della *retta* e del *piano,* che si riattaccano ai concetti di *segmento* ed *angolo*; e così pure quelle proprietà delle divisioni in parti dello spazio, che son legate al concetto del *diedro.*

Di codeste proprietà, che generalmente nei trattati di geometria elementare sono desunte dalla intuizione e applicate tacitamente, ci occuperemo brevemente ed evitando sviluppi logici troppo sottili nei §§ che seguono.

Si avrebbe poi un terzo gruppo di proprietà geometriche legate al concetto della *congruenza* o del *movimento (proprietà metriche),* ma di queste non ci occuperemo, rimandando all' art. 3.°

Ci limiteremo pertanto a mettere in luce quelle proprietà *(grafiche)* della retta e del piano (del segmento, dell' angolo e del diedro) che molto opportunamente possono introdursi prima di ogni nozione di congruenza.

§ 5. **Il segmento.** — Le proprietà *segmentarie* rientrano in quella categoria di proprietà, che l' intuizione attribuisce alla retta considerata in sè stessa, astrazion fatta, cioè, da ogni relazione della retta medesima con lo spazio esteriore: sono quindi proprietà, che la retta ha comuni con tutte le linee intuitive, *aperte* e *non terminate:*

Codeste proprietà possono essere introdotte nel sistema geometrico in tre modi ben distinti, ma tra loro equivalenti.

Se ci riferiamo alla generazione intuitiva della *retta* per mezzo di un punto mobile, siamo condotti a postulare le proprietà inerenti agli *ordini naturali,* in cui vengono disposti i punti della retta. Siffatte proprietà sono logicamente formulate nel seguente postulato:

IV *a. I punti della retta sono disposti in un* ordine naturale *(o nel suo* inverso, *ottenuto, scambiando le parole* « precede » *e* « consegue ») *per modo che:*

α) *Dati due punti A, B, uno di essi* precede *l'altro, il quale allora* consegue *al primo.*

β) *Se A* precede *B, e B* precede *C, A* precede *C.*

γ) *Se A* precede *B vi è qualche punto* conseguente *ad A e* precedente *a B.*

δ) *Non esiste alcun* primo *punto (precedente a tutti gli altri), nè alcun* ultimo.

Le proposizioni α) e β) spettano alla retta in quanto è linea *aperta* e *non terminata*; la γ) stabilisce che tra due punti *A* e *B* della retta ve ne sono altri, distinti da *A* e *B,* e in numero infinito.

A completare le proprietà degli ordini naturali della retta occorre aggiungere il *postulato della continuità* (cfr. art. 4.°).

Ammesso il postulato IV *a* si definirà *il segmento AB* come l'*insieme dei punti della retta che sono fra A* e *B,* cioè dei punti, che in uno qualsivoglia dei due ordini naturali conseguono all'uno e precedono l'altro dei due punti *A* e *B.* L'unicità dell'ente, che è così definito in doppio modo, corrispondentemente ai due ordini della retta, è stabilita dal postulato premesso. I punti del segmento vengono così disposti in due *ordini naturali,* l'uno inverso dell'altro, e questi ordini hanno ciascuno un primo ed un ultimo elemento *(estremi del segmento).*

Ma anzichè considerare la retta *geneticamente,* noi possiamo riguardarla nel suo aspetto *attuale;* ed allora come base intuitiva delle sue proprietà segmentarie si presenta la *divisione in parti.*

Seguendo questo concetto, codeste proprietà si possono postulare sotto la forma seguente:

IV *b.* α) *Un qualsivoglia punto A di una retta p la divide in* due parti *(classi di punti), dette anche* semirette *o* raggi, *per modo che ogni punto diverso da A appartiene ad* una *delle due parti.*

β) *A ciascuna delle nominate parti appartengono punti.*

γ) *Siano A* e *B due punti qualsiansi della retta p: delle due parti, in cui essa è divisa da B, quella che contiene A contiene tutti i punti che sono dalla parte di A opposta a B e altri punti ancora.*

La possibilità che la retta sia una *linea chiusa* o *avente termini* è qui esclusa dalle proposizioni α) e β): la proposizione γ) determina quale relazione intercede fra tutte le possibili divisioni in parti della retta, che sono date dai singoli punti di essa: più precisamente ancora stabilisce che tra due punti *A* e *B* qualsivogliano della retta *p* esistono su questa altri punti distinti da *A* e *B.*

In base al postulato IV *b* il *segmento AB* si definirà come *l' insieme dei punti comuni alla parte relativa ad A, che contiene B, e alla parte relativa a B, che contiene A.*

I postulati IV *a* e IV *b* sono fra loro *equivalenti,* in quanto ciascuno di essi si deduce logicamente dall' altro. Ma noi qui non ci tratterremo su questa deduzione, che del resto si presenta assai agevole, e passeremo senz' altro ad accennare il terzo modo di introdurre le proprietà segmentarie della retta.

Nelle due formulazioni dei principi della Geometria, rappresentate dal sistema di postulati I, II, III, IV *a* la prima, I, II, III, IV *b* la seconda, la retta compare

come ente primitivo e, subordinatamente a quella, vi è stabilito il concetto di *segmento*. Il Pasch [1] ed il Peano [2] seguono invece la via precisamente opposta, assumendo come primitivo il concetto di *segmento* e servendosene poi per definire la *retta*. Possiamo notare che anche questa concezione ha, sotto un certo aspetto (cioè relativamente alla retta), *carattere genetico*.

I postulati del Pasch, relativi al *segmento*, sono i seguenti:

1.° *Due punti determinano sempre un segmento rettilineo (di cui sono estremi) ed uno solo.*

2.° *Si può sempre assegnare un punto, che cada dentro un dato segmento rettilineo.*

3.° *Se il punto C cade nel segmento AB, il punto A cade fuori del segmento BC.*

4.° *Se il punto C cade dentro il segmento AB, tutti i punti del segmento AC sono nello stesso tempo punti di AB.*

5.° *Se il punto C cade nel segmento AB, un punto, che non appartenga nè ad AC nè a BC, non può appartenere ad AB.*

6.° *Se A e B sono punti qualsivogliano, si può scegliere il punto C in modo che B cada dentro il segmento AC.*

7.° *Se il punto B giace dentro i segmenti AC e AD, o il punto C cade dentro il segmento AD, o il punto D cade dentro AC.*

8.° *Se il punto B cade dentro il segmento AC e il punto A dentro il segmento BD, e se si uniscono C, D per mezzo di un segmento rettilineo, il punto A cade anche nel segmento CD.*

Da questi postulati (definita la *retta*) si deducono logicamente le proposizioni I, IV *a* e IV *b* e, reciprocamente, ciascuna di queste permette di dimostrare come teoremi le otto proposizioni or ora enumerate.

(1) *Vorlesungen über neuere Geometrie* — Leipzig, Teubner, 1882.
(2) *I Principii di Geometria logicamente esposti* — Torino. Bocca, 1889.

§ 6. **L' angolo.** — Le prime proprietà *superficiali* del piano si riattaccano al concetto di *angolo.* Delle definizioni successivamente proposte per l' *angolo* e delle discussioni che ne derivarono si troverà un' ampia e diligente rassegna nel II volume della *Planimetria comparata* dello Schotten. Io qui mi limiterò ad osservare, con lo Schotten stesso (*l. c.* pag. 99), che le definizioni di *angolo* si possono classificare in tre gruppi:

1.° *Angolo è la differenza di direzione di due rette.* A questa definizione si può ravvicinare quella di Euclide, per cui *l' angolo è l' inclinazione di due linee nel piano, che si incontrano e non sono poste sulla medesima retta.*

2.° *L' angolo è la grandezza (o la misura) della rotazione di un lato sull' altro nel piano.*

3.° *Angolo è la parte di piano racchiusa da due raggi uscenti da un punto.*

Le definizioni del primo gruppo sono vere tautologie in quanto suppongono già, in certo modo, come primitivo il concetto di angolo.

Quelle del secondo gruppo si basano sopra l' idea della rotazione di una retta o d' un raggio del piano attorno ad un punto, idea che, logicamente formulata, può condurre ad una conveniente introduzione dell' angolo.

Importa tuttavia di separare in essa quanto vi è di grafico, cioè di indipendente dal concetto della congruenza, facendo scaturire prima la nozione di angolo, per venire poi (subordinatamente) alla nozione di *angoli uguali* (art. 3.°).

A questo requisito, di non includere concetti metrici, soddisfanno le definizioni del 3.° gruppo sopra menzionato; ma esse non corrispondono interamente al concetto intuitivo dell' *angolo*, cui noi attribuiamo i caratteri di ente ad una dimensione, bensì piuttosto ad un *ente a due dimensioni* che può chiamarsi (col Veronese) *settore angolare.* Ma il difetto osservato facilmente si rimedia,

considerando come angolo « l' insieme dei raggi uscenti dal vertice e compresi nel settore angolare ».

Volendo ora indicare le principali vie che conducono ad una formulazione logica delle prime proprietà superficiali del piano, da cui scaturisca una definizione dell' angolo, possiamo distinguere (come nel § 5) due punti di vista:

1.° un punto di vista *genetico*;

2.° un punto di vista *attuale*.

Il primo punto di vista muove dal considerare la generazione del *fascio di rette o di raggi* (insieme di tutte le rette d' un piano passanti per un punto, o, rispettivamente, di tutti i raggi del piano aventi l'estremo in quel punto) mediante il movimento di una retta o di un raggio, nel piano, attorno ad un punto. Esso conduce a postulare anzitutto un *ordine chiuso* o *disposizione circolare* delle rette o raggi d' un fascio [1]. Poi occorre enunciare il legame intercedente fra le disposizioni di due fasci qualsivogliano d' uno stesso piano, ammettendo che: Se più raggi susseguentisi a_1 a_2 a_3... a_n d' un fascio A sono segati da una medesima retta nei punti distinti A_1 A_2... A_n, e se questi punti vengono proiettati da un punto B, esterno alla retta, secondo i raggi b_1 b_2 b_3 . . . b_n questi ultimi raggi sono susseguentisi nel fascio di centro B.

Stabilita la *disposizione circolare naturale* degli elementi del fascio e postulatone il carattere proiettivo, si può introdurre la nozione dei due *versi* delle figure nel piano. Rimandiamo all'opera del VERONESE [2] chi desidera conoscere i relativi sviluppi e ci limitiamo ad osservare che si può definire la *concordanza* e *discordanza* di *verso* tra due fasci qualsivogliano, in guisa che è poi possi-

[1] Cfr. p. es. ENRIQUES — *Lezioni di Geometria Proiettiva* - Bologna, Zanichelli. 1898.

[2] *Fondamenti di Geometria* — Pag. 347 e 374.

bile stabilire il teorema: *Se in due fasci di raggi del piano si hanno due* versi *concordi a un* verso *fissato in un terzo fascio, questi due* versi *sono concordi.*

Ma l' *indirizzo genetico*, del quale qui si è tenuto parola, conduce a sviluppi non tanto semplici nella Geometria elementare, apparendo invece più utile nella Geometria proiettiva ove (dopo la convenzione relativa al punto all' infinito) i punti della retta appaiono disposti in un ordine chiuso come i raggi d' un fascio.

Ponendoci ad un punto di vista *attuale*, porremo a base della definizione dell' angolo la *divisione del piano in due parti per mezzo della retta.*

Data nel piano una retta p, due punti A e B di quello si dicono *giacenti da parti opposte* o *dalla stessa parte* di p, a seconda che il segmento AB incontra o non incontra la retta data. Così se due rette si incontrano in un punto O, i due raggi, in cui ciascuna di esse è divisa da O, giacciono da parti opposte dell' altra retta.

Data, allora, nel piano una retta p ed un punto P, il piano resta diviso in *due parti* (classi di punti), l'una contenente tutti i punti che cadono con P dalla stessa parte di p, l' altra tutti i punti che cadono, rispetto a p, dalla parte opposta di P. Ma può nascere il dubbio, che questa divisione in parti del piano dipenda in qualche modo dalla scelta particolare del punto P. Un tale dubbio non può esser tolto se non dal seguente postulato:

V *a. Se in un piano due punti B e C giacciono dalla stessa parte di una retta p, ed il punto A giace da parte opposta di B, A giace pure da parte opposta di C.*

Nel piano due rette a, b, che si incontrino in un punto O, lo dividono in quattro regioni, che diconsi *settori angolari* (convessi), in guisa che il segmento AB incontra o non incontra una delle rette a, b, secondo che A e B appartengono o non appartengono ad un

medesimo settore angolare. Questi quattro settori si ottengono, considerando, nei quattro modi possibili, i punti comuni ad una delle due regioni in cui il piano è diviso da a (regioni relative ad a) e ad una delle due regioni in cui il piano è diviso da b (regioni relative a b). Ciascuna delle coppie di regioni che così si ottengono ammette punti comuni: infatti se A_1, A_2 sono due punti di a, giacenti da parti opposte di b, e B_1, B_2 due punti di b, giacenti da parti opposte di a, i segmenti A_1B_1, B_1A_2, A_2B_2, B_2A_1 danno (esclusi gli estremi) punti dei quattro settori ordinatamente.

Così due *raggi* r_1, r_2, aventi l' origine O in comune e non appartenenti ad una stessa retta definiscono un ben determinato *settore angolare*, contenente tutti i punti comuni a quella delle regioni piane relativa alla retta di r_1 che contiene r_2 e a quella delle regioni piane relative ad r_2 che contiene r_1. I raggi r_1, r_2 diconsi *lati* del settore angolare. Il settore angolare, determinato dai raggi r_1', r_2' opposti rispettivamente ad r_1, r_2 dicesi settore angolare *opposto al vertice* di r_1 r_2. Se P e Q sono due punti del settore angolare r_1r_2 (o dei raggi r_1, r_2 rispettivamente) l' intero segmento PQ vi appartiene, perchè è tutto costituito di punti che giacciono da quella stessa parte di r_1 (e di r_2) da cui cadono P e Q. Analogamente appartiene per intero al settore angolare ogni raggio uscente da O e passante per un qualsivoglia punto di esso.

Premesse queste considerazioni, si può definire come *angolo ab o ba l' insieme dei raggi uscenti da O e appartenenti al settore angolare che ha per lati a e b.* All' angolo si possono aggiungere, volendo. i lati a e b.

Questa definizione di angolo permette di dimostrare la seguente proposizione, che negli ordinari trattati è desunta tacitamente dall' intuizione: *Se P è un punto interno ad un angolo* (o settore angolare) r_1r_2 *e Q è un*

punto esterno, il segmento PQ incontra uno dei lati dell' angolo (o del settore angolare).

Infatti, dato il punto P interno all' angolo, distinguiamo due casi, a seconda che il punto Q, esterno ad $r_1 r_2$ è interno od esterno al settore angolare $r_1' r_2'$, opposto al vertice rispetto ad $r_1 r_2$.

Nel primo caso P e Q giacciono da parti opposte, tanto rispetto alla retta di r_1, quanto rispetto alla retta di r_2; onde il segmento PQ incontra codeste due rette in due punti A e B rispettivamente. Ora non è possibile che simultaneamente A appartenga ad r_1' e B ad r_2': giacchè in tal caso, insieme con P, anche il punto Q cadrebbe fuori dell' angolo $r_1' r_2'$.

Se poi Q è esterno oltre che all' angolo $r_1 r_2$, anche all' angolo $r_1' r_2'$, esso deve cadere con P da parti opposte rispetto ad una delle rette, p. es. alla retta di r_1, e dalla stessa parte rispetto all' altra. Il segmento PQ incontrerà quindi la retta del raggio r_1, e, poichè l' intero segmento cade da quella parte della retta di r_2, in cui è (P e quindi ancora) il raggio r_1, esso incontra precisamente il raggio r_1.

Ora siano date nel piano tre rette a, b, c, e siano A, B, C i tre punti determinati dalle tre coppie bc, ca, ab. Due qualsivogliano delle rette date, p. es. a, b, dividono il piano in quattro settori angolari: in uno di questi la retta c non penetra e questo è il settore definito dai due raggi di a e b, uscenti da C e non contenenti B, A rispettivamente. Ciascuno degli altri tre settori è dalla c diviso in due regioni, come è facile persuadersi considerando le due regioni piane relative a c. Dunque il piano resta diviso dalle tre rette a, b, c in sette regioni. Di queste diremo *triangolo* ABC quella che contiene i punti comuni alla regione piana relativa ad a, che contiene A, alla regione piana relativa a b, che contiene B, e alla regione piana relativa a c, che contiene C, (aggiunti, se si vuole, i

segmenti AB, BC, CA che diconsi lati del triangolo e ne costituiscono il *perimetro* o *contorno*).

Dalla definizione stessa discende che il triangolo è tutto interno (costituito da tutti punti interni) a ciascuno degli angoli definiti dalle coppie di raggi AB, AC; BA, BC; CA, CB: questi diconsi *angoli del triangolo,* e tre delle sette regioni in cui il piano è diviso dalle rette a, b, c sono date dagli angoli opposti al vertice degli angoli del triangolo: le altre tre regioni, esterne al triangolo, sono, ciascuna, interne ad uno degli angoli del triangolo. Infine si ha che appartiene per intero al triangolo ogni segmento congiungente due punti qualsivogliano del perimetro.

Premesse queste osservazioni, si dimostra facilmente il seguente teorema fondamentale, che è ordinariamente ammesso ed applicato in modo implicito: *Se P è un punto interno al triangolo ABC e Q è un punto esterno, il segmento PQ incontra in un punto* (e in uno solo) *il contorno del triangolo.*

Il punto Q può anzitutto cadere in uno degli angoli del triangolo, p. es. nell' angolo di vertice A. Ciò vuol dire che Q cade con P dalla stessa parte tanto rispetto a b che rispetto a c: non così, per altro, rispetto ad a, giacchè Q è esterno ad ABC. Risulta di qui che il segmento PQ incontrerà la retta c in un punto, e, poichè questo punto, come ogni altro di PQ, deve essere interno all' angolo dei raggi AB, AC, esso appartiene al lato BC del triangolo.

Supponiamo, in secondo luogo, che Q non cada in nessuno degli angoli del triangolo: cadrà allora in uno degli angoli opposti al vertice di quelli, p. es. nell' angolo opposto al vertice di BAC.

Allora P e Q cadono da parti opposte tanto di c quanto di b e il segmento PQ incontra queste due rette in due punti R, S rispettivamente. Uno di codesti punti

appartiene di necessità al contorno di ABC: se, infatti, così non fosse, insieme con Q anche P dovrebbe essere esterno all' angolo dei raggi AB, AC, il che è contro l' ipotesi.

Torniamo oramai al concetto di angolo, e vediamo come dalla definizione *attuale*, dianzi indicata, si deducano proprietà che possono essere poste a base di una nuova definizione dell' angolo, la quale si può presentare sotto un aspetto attuale o genetico, ma ha il peculiare carattere di essere indipendente dal concetto di piano, permettendo anzi la *costruzione del piano stesso.*

L' idea di costruire così il piano, anzichè darlo *a priori*, si accosta al punto di vista del VERONESE.

Abbiamo visto che, dato un angolo ab, di vertice O, se A e B sono due punti di a e b rispettivamente, e C è un punto del segmento AB, il raggio uscente da O e passante per C appartiene per intero all' angolo. Reciprocamente *se c è un raggio appartenente all' angolo ab, esso incontra in un punto C ogni segmento, avente gli estremi sui lati dell' angolo.*

Questa proposizione sarà stabilita, quando si dimostri che i raggi a e b cadono da parti opposte del raggio c. Ricordiamo, a questo scopo, che se C è un punto di c e D un punto dell' angolo opposto al vertice del dato, il segmento CD, come abbiamo visto più sopra, incontra le rette dei raggi a e b in due punti P e Q, rispettivamente, dei quali l' uno appartiene ad un lato di ab, l' altro al raggio opposto all' altro lato. Per fissare le idee, supponiamo che P appartenga ad a e Q al raggio b', opposto a b: allora il punto C è esterno al segmento PQ e i raggi b' e a cadono dalla stessa parte di c: ne consegue, come appunto volevamo dimostrare, che a e b cadono da parti opposte di c.

La proposizione, così dimostrata, ci conduce naturalmente a considerare come *angolo ab* di due raggi

uscenti da un punto O l' *insieme dei raggi proiettanti da O i punti di un segmento AB, avente i suoi estremi su a, b rispettivamente,* e come *settore angolare* l' insieme dei punti appartenenti ai raggi dell' angolo. Ma se a definire l' angolo si sceglie codesta costruzione, è necessario stabilire l' indipendenza dell' ente definito dal segmento AB, che, nella definizione stessa, ha un ufficio tutto particolare. Siffatta indipendenza si stabilisce, ponendo il seguente postulato:

V *b*. *Un raggio dell' angolo ab incontra in un punto ogni segmento avente gli estremi sui lati a, b.*

Abbiamo visto che, partendo dalla definizione *attuale* di angolo, si può, per mezzo del postulato V *a*, dimostrare la proposizione V *b*: reciprocamente la suindicata definizione *genetica,* completata dal postulato V *b*, permette di dimostrare la proposizione V *a*. Risulta di qui che codesti due modi di introdurre il concetto di angolo sono tra loro equivalenti: ma noi qui non ci tratterremo a compiere la dimostrazione di una tale equivalenza.

Noteremo soltanto come, corrispondentemente alla generazione della retta secondo il Pasch, si possa per mezzo dell' angolo definito nell' ultimo modo considerato, (cioè indipendentemente dal piano), *costruire il piano stesso unendo due angoli* (supplementari) *che hanno un lato comune e due lati opposti, e stabilire quindi le sue proprietà fondamentali di appartenenza.*

§ 7. **Il Diedro.** — Per il *diedro* valgono considerazioni affatto analoghe a quelle svolte sull' *angolo.* Anche qui conviene distinguere il *diedro* come *insieme di semi-piani,* o diedro propriamente detto, dall' insieme dei punti di codesti semi-piani, a cui possiamo dare il nome di *settore solido.*

Partendo dalla *concezione genetica* del diedro, si è condotti a riattaccarne la definizione alla generazione

dello spazio per mezzo del movimento di un piano (o di una falda di piano) intorno ad una retta. Gli elementi del fascio di semi-piani, o di piani completi, vengono così ordinati *a priori* in una *disposizione circolare (naturale)*, che si può porre a base della definizione di diedro. Per porre in relazione le disposizioni circolari di due fasci qualsivogliano è necessario *postulare* il *carattere proiettivo* di codesta disposizione circolare, per il quale i piani susseguentisi in un fascio sono segati da una retta in punti, che, da ogni retta distinta dall' asse del fascio, sono proiettati secondo piani susseguentisi. Si può allora, in particolare, dedurre dalla considerazione della disposizione circolare nel fascio la nozione fondamentale dei due *versi elicoidali di movimento* delle figure nello spazio [1].

Se riguardiamo invece il *diedro* sotto l' aspetto *attuale*, porremo a base della sua definizione la considerazione della divisione in due parti dello spazio per mezzo di un piano. Definiti due punti A, B come giacenti da parti opposte o dalla stessa parte di un piano α, secondo che il segmento AB incontra o no il piano, è necessario postulare la proposizione:

VI *a: Se due punti B, C giacciono dalla stessa parte di un piano, ed il punto A giace da parte opposta di B, A giace anche da parte opposta di C.*

Stabilito quindi il fatto che due piani, intersecantisi secondo una retta, dividono lo spazio in quattro *settori solidi*, dicesi *diedro* di due semi-piani α e β uscenti da una retta *o* l'insieme dei semi-piani appartenenti al settore solido, che è definito da α e β. Si può allora definire il *tetraedro* (e il *poliedro*) e si dimostra che se P è un punto interno e Q un punto esterno a un tetraedro

[1] VERONESE — *Fondamenti di Geometria*, pagg. 412 e 443.

(poliedro) il segmento PQ ha un punto in comune col contorno del tetraedro (poliedro).

Infine, dalla definizione *attuale,* completata dalla proposizione VI *a,* si deduce che ogni semi-piano di un diedro $\alpha\beta$ incontra in un punto ogni segmento avente gli estremi su α, β rispettivamente. Si presenta così un terzo modo (avente, sotto un certo riguardo, carattere genetico) di definire il diedro: « *Dicesi* diedro *l' insieme dei semi-piani che da una retta proiettano i punti di un segmento AB.* » Qui gli *ordini naturali* nel diedro e nel fascio si *deriveranno* da quelli della retta, *postulando* la proposizione:

VI *b. Un semi-piano di un diedro* $\alpha\beta$ *incontra in un punto un qualsiasi segmento, avente gli estremi sulle facce* α, β.

Le tre vie indicate sono tra loro *equivalenti.* Per ciascuna di esse si incontra un postulato, il cui ufficio si può esprimere chiaramente dicendo che *esso limita a tre le dimensioni dello spazio.* È per mezzo dell' indicato postulato che, in ciascuno dei tre indirizzi, si dimostra quel teorema, per cui il fatto delle tre dimensioni entra in modo immediato nella serie delle deduzioni geometriche: « *Due piani aventi in comune un punto hanno in comune una retta* ». Reciprocamente, questa proposizione, assunta come primitiva, permette di dimostrare ciascuno degli accennati postulati relativi al diedro, deducendoli dalle proprietà degli angoli sezioni del diedro stesso, e di svolgere, quindi, i tre diversi ordini di considerazioni, che da essi rispettivamente dipendono.

ARTICOLO TERZO

« **Della congruenza e del movimento** » di Alfredo Guarducci a Lodi.

§ 1. **Considerazioni generali.** — Alcuni autori confondono la *congruenza* o *eguaglianza geometrica* colla *eguaglianza logica* o *identità*, dicendo, che due figure geometriche sono eguali, se dell' una si può dire tutto ciò che si dice dell' altra. Essi intendono, in altre parole, che l' eguaglianza di due figure A, A' consista in questo, che *tutte* le proprietà di A appartengano anche ad A', e viceversa; mentre, come è già stato osservato, per esempio dallo Stoltz, due figure congruenti geometricamente hanno proprietà diverse in relazione alla loro diversa posizione nello spazio nel quale si considerano come contenute (paragonate ad una *stessa* figura). Una tale definizione non può quindi venire accettata, come quella che darebbe come unico caso della congruenza geometrica la coincidenza delle figure.

Sorge allora l' idea che la detta congruenza esprima una proprietà fisica dei corpi, fisicamente verificabile. Helmholtz sostiene appunto che l' idea di congruenza si acquista psicologicamente mediante il movimento dei

corpi rigidi, e che nasce anzi più propriamente dal *principio di sovrapponibilità* relativo al movimento stesso.

Da tale osservazione scaturisce un primo indirizzo in cui la Geometria assume come *primitivo* il concetto di movimento, e ne trae la definizione di congruenza. A questa idea in sè, nulla vi è da obiettare, purchè le proprietà del movimento vengano convenientemente postulate in modo esplicito.

Questo è stato fatto con esattezza, conforme alle idee di Helmholtz, dal Lie, riguardando i movimenti come formanti un *gruppo continuo* di trasformazioni (serie continua di trasformazioni componibili e invertibili). Non sembra però che tali sviluppi si possano oggi portare utilmente nel campo didattico; e d' altra parte il modo come ordinariamente s' introducono nella Geometria elementare le proprietà del movimento, non può considerarsi come una formulazione rigorosamente logica di esse.

Ma per quanto, secondo Helmholtz, l' idea di congruenza si acquisti, come abbiamo accennato, mediante il movimento, è certo che essa ha pure, nella nostra mente formata, un senso proprio, cioè « la possibilità di sostituire una figura ad un' altra, ad essa eguale, in tutto un ordine di proprietà ». Ed è anzi più semplice di quella del movimento, perchè si riattacca soltanto alla considerazione dello stato iniziale e finale di questo, prescindendo dalla continuità degli stati intermedî. Ond' è che fra queste due idee che possiamo considerare come sperimentalmente acquisite durante la formazione della mente nell' infanzia, pare a noi più conveniente assumere come primitiva nell' organismo matematico quella della relazione di congruenza.

In questo secondo indirizzo che così ne deriva, per la trattazione della Geometria, non è escluso che si possa dare come un principio fisico (teorico) il principio della sovrapponibilità delle figure congruenti, servendosene

come per fare delle esperienze ideali, da cui si desumono, non dei teoremi (logicamente dimostrati) ma dei postulati (sperimentalmente stabiliti).

Si tratta qui di considerare i varî modi in cui la nozione primitiva della congruenza può essere caratterizzata con un sistema di postulati. I modi che hanno formato l'oggetto di questo studio sono tre: quello di Pasch [1], quello di Veronese [2], quello di Hilbert [3].

§ 2. **Il sistema di postulati di Pasch.** — Pasch considera come data la nozione di *congruenza* o *eguaglianza* per *figure qualsiasi composte d' un numero finito di punti* $ABC\ldots.$, $A'B'C'\ldots.$ Questa relazione fra le due figure può indicarsi colla notazione:

$$ABC\ldots. \equiv A'B'C'\ldots.$$

I postulati seguenti, a parte l'ordine e qualche lieve modificazione di forma, riproducono il contenuto essenziale di quelli di Pasch:

1) Una figura è congruente a sè stessa.

2) Se una figura è congruente ad un'altra, anche la seconda è congruente alla prima.

3) Due figure congruenti ad una terza sono congruenti fra loro.

4) Le figure AB e BA sono congruenti.

5) Se $AB \equiv AC$, le figure BAC e CAB sono congruenti.

6) Se $A, B, C,$ sono tre punti tali che C appartenga al segmento rettilineo AB, e le figure ABC,

---

(1) Pasch, *Vorlesungen über neuere Geometrie.* Leipzig 1882.

(2) Veronese, *Fondamenti di Geometria,* Padova 1891 e *Elementi di Geometria,* Padova 1897.

(3) Hilbert, *Grundlagen der Geometrie. Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber Denkmals in Göttingen.* Leipzig 1899.

$A'B'C'$ sono congruenti, anche il punto C' appartiene al segmento rettilineo $A'B'$.

7) Se due figure $ABCD\ldots.$, $A'B'C'D'\ldots.$, sono congruenti, fra i punti di esse si può pensare una *corrispondenza* nella quale le figure costituite da gruppi di punti omologhi sono congruenti.

8) Date due figure congruenti F, F', se ad una di esse si aggiunge un punto P, anche alla seconda si può aggiungere un punto P' in guisa che le due nuove figure resultino ancora congruenti, e precisamente:

9) Sopra una retta a', e da una parte d' un punto A', si può determinare uno ed un solo punto B' tale che sia $A'B' \equiv AB$.

10) Data una terna di punti A, B, C, non in linea retta, e una coppia di punti A', B' tale che sia $A'B' \equiv AB$, in ogni piano per la retta $A'B'$ e da una parte di essa si può determinare uno ed un solo punto C' in guisa che sia: $ABC \equiv A'B'C'$.

11) Data una quaterna di punti $ABCD$ non giacenti in un piano, non esiste alcun punto X distinto da D per cui sia:

$$ABCX \equiv ABCD$$

(vale a dire: data una terna di punti $A'B'C' \equiv ABC$, si può determinare in modo unico un punto D' pel quale resulti:

$$A'B'C'D' \equiv ABCD).$$

Allo scopo di mostrare come questi postulati possano servire di base all' ordinaria teoria della congruenza, cominciamo dal definire la congruenza di segmenti e di angoli.

« *Due segmenti AB, CD si diranno congruenti quando* » *sono congruenti le coppie AB e CD.* »

Quanto agli angoli, premettiamo l' osservazione seguente:

Sia (ab) un angolo di vertice O, e sia O' un punto sulla retta a'.

Presi due punti A e B sui raggi a, b rispettivamente, e un punto A' sulla a' in modo che sia $O'A' \equiv OA$, determiniamo (post.° 10) il punto B' in guisa che sia

$$O'A'B' \equiv OAB.$$

Resta così determinato, col punto B', il raggio $O'B'$ che chiameremo b', e l'angolo $(a'b')$ di vertice O'. Se ora sui lati a, a' rispettivamente, prendiamo due punti C, C' in modo che sia $OC \equiv O'C'$, e sui lati b, b' due punti D, D' in modo che sia $OD \equiv O'D'$, è facile vedere che le due figure OCD, $O'C'D'$ sono congruenti. Infatti dal post.° 10 segue subito che alla figura $O'A'B'$ si possono aggiungere due punti X, Y in guisa da avere

$$O'A'B'XY \equiv OABCD.$$

Ma dai postulati precedenti segue anche che X deve appartenere alla retta $O'A'$, e così pure Y alla retta $O'B'$; e segue che $O'X \equiv OC$ $O'Y \equiv OD$, donde si deduce che i punti X e Y coincidono rispettivamente con C' e D' e perciò $OCD \equiv O'C'D'$.

In base a questa osservazione, definiremo la congruenza di due angoli nel modo seguente:

« *Due angoli* (ab) $(a'b')$ *di vertici* O O', *si diranno* » *congruenti se, scelte sui loro lati due coppie di punti* A, B » *e* A', B' *rispettivamente, in guisa che sia* $OA \equiv O'A'$ » $OB \equiv O'B'$, *ne resulta* $OAB \equiv O'A'B'$. » [1].

Da quanto precede si ha subito:

α) Da una parte del raggio a', in un dato piano, vi è uno ed un solo raggio b' pel quale resulta l'angolo $(a'b')$ congruente ad un dato angolo (ab).

[1] In particolare, prendendo $OA \equiv OB$ su a, b rispettivamente, dal post.° 5 segue l'invertibilità dell'angolo.

L' eguaglianza o congruenza di due triangoli si può definire come congruenza delle terne di vertici, e dedurne che i lati (segmenti o coppie di punti) sono congrui e così pure gli angoli.

Se ne traggono ora facilmente le tre proposizioni fondamentali sulla congruenza dei triangoli. Intanto dalla definizione, data sopra, di congruenza angolare, segue immediatamente che:

I. *Due triangoli sono congrui se sono rispettivamente congrui un angolo e i lati che lo comprendono.*

Dimostriamo ora che:

II. *Sono congrui due triangoli che hanno rispettivamente congrui un lato e i due angoli adiacenti.*

Siano i dne triangoli ABC $A'B'C'$ che abbiano $AB \equiv A'B'$ $\widehat{CAB} \equiv \widehat{C'A'B'}$; $\widehat{CBA} \equiv \widehat{C'B'A'}$; dico che $ABC \equiv A'B'C'$. Infatti essendo $AB \equiv A'B'$, nel piano ABC e dalla stessa parte di AB dalla quale si trova il punto C, determiniamo (post.° 10) un punto C'' in guisa che sia:

$$AC''B \equiv A'C'B'.$$

Dalla congruenza di queste due terne di punti, e dalla conseguente congruenza degli angoli da essi determinati, tenendo conto dell' ipotesi e della proposizione α) si conclude che i raggi AC'' BC'' non possono essere distinti dai raggi AC, BC rispettivamente, e che per conseguenza i punti C, C'' coincidono. Rimane dunque dimostrata la congruenza dei triangoli dati ABC, $A'B'C'$.

III. *Sono congruenti due triangoli se i lati dell' uno sono rispettivamente congruenti ai lati dell' altro.*

Siano i due triangoli ABC, $A'B'C'$ (Fig. 1) che abbiano:

$$AB \equiv A'B' \quad AC \equiv A'C' \quad BC \equiv B'C';$$

dico che $ABC \equiv A'B'C'$.

Infatti, poichè $AB \equiv A'B'$, nel piano ABC, e dalla stessa parte di AB dalla quale si trova il punto C, si può aggiungere (post.° 10) da AB un punto C'' in guisa che resulti:

$$ABC'' \equiv A'B'C'.$$

Si avrà allora, tenendo conto anche dell' ipotesi,

$$AC \equiv AC'' \quad BC \equiv BC''$$

Essendo poi (post.° 5)

$$CAC'' \equiv C''AC,$$

potrà aggiungersi alla figura $C''AC$ un punto B'' in modo che resulti:

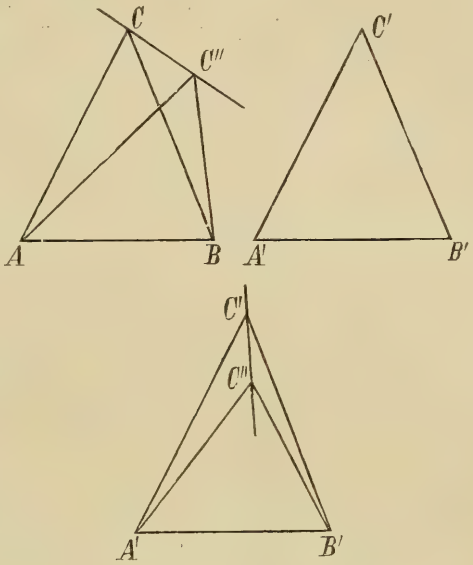


Fig. 1

$$m) \qquad C''ACB'' \equiv CAC''B.$$

Potrà darsi che nella figura $CAC''B$ i due punti A e B giacciano dalla stessa parte della retta CC'', oppure da parti opposte; ma poichè nella figura $C''ACB''$ i punti A B'' giaceranno anch' essi, nel primo caso, dalla stessa parte di CC'', e nel secondo da parti opposte, avremo che B e B'' giaceranno sempre dalla stessa parte di CC''.

Si ha d' altronde (post.° 5)

$$CBC'' \equiv C''BC$$

e, per la relazione m), anche

$$CBC'' \equiv C''B''C;$$

se ne conclude (post.° 3):

$$C''BC \equiv C''B''C,$$

il che significa che i punti B B'' coincidono. La relazione m) diventa allora:

$$C''ACB \equiv CAC''B$$

da cui

$$ACB \equiv AC''B.$$

Dunque i punti C, C'' coincidono, e i due triangoli dati sono congruenti.

Sarebbe facile ora dedurre da queste proposizioni il teorema sull' eguaglianza degli angoli alla base del triangolo isoscele, quello sull' angolo esterno ecc. nonchè l' eguaglianza degli angoli opposti al vertice (cfr. in fine al § 4), le proposizioni sull' eguaglianza dei poligoni e così via. Ma quanto precede ci sembra sufficiente a dare un' idea dell' indirizzo a cui conducono i postulati di Pasch; e passiamo quindi ad esporre brevemente il metodo di Veronese.

§ 3. **Il sistema di Veronese.** — Il Veronese introduce come primitivo il concetto di *congruenza fra segmenti* (relazione che si può designare col segno $\equiv$) e definisce poi come congruenti « due figure fra le quali esiste una » corrispondenza biunivoca punto per punto, tale che » a punti d' un segmento corrispondono punti (ordinati » allo stesso modo) d' un segmento; e al segmento deter- » minato da due punti dell' una figura, corrisponde un » segmento congruente nell' altra ».

Ecco i postulati che s' incontrano in quest' ordine d' idee:

1) Un segmento è congruente a sè stesso.

2) Se un segmento è congruente ad un altro, anche il secondo è congruente al primo.

3) Due segmenti congruenti ad un terzo sono congruenti fra loro.

4) Un segmento non è congruente ad una sua parte.

5) Il segmento AB è congruente al segmento inverso BA ($AB \equiv BA$).

6) Dato sulla retta un punto A, e un segmento XY qualunque, esistono sulla retta stessa due segmenti AB, AC congruenti ad XY, da parti opposte di A.

7) In ogni retta esiste un segmento congruente ad un segmento qualunque dato.

8) Sieno AB, AC e $A'B'$, $A'C'$, due coppie di rette incidenti sopra le quali si determinino i segmenti congruenti

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C';$$

quando sia

$$BC \equiv B'C',$$

le due coppie di rette nominate sono congruenti.

In questa formulazione si tien conto, non solo degli « Elementi », ma anche di ciò che il Veronese espone nei « Fondamenti » citati. Negli « Elementi » non figura il postulato qui designato col n.° 8, e vi figura invece un postulato più ristretto (corollario di esso) concernente *l' invertibilità* della coppia di rette incidenti. Ma la teoria della congruenza non vi è basata soltanto su questi principii, bensì anche sopra un postulato che racchiude quello d' Euclide sulle parallele e qualche altra relazione di congruenza.

Pertanto il postulato 8 (ove non si faccia altra ipotesi) è strettamente necessario a fondare la teoria della congruenza.

Come essa si possa svolgere il lettore potrà vedere nei citati libri del Veronese, che sono ormai nel dominio degli insegnanti delle nostre scuole secondarie.

§ 4. **Il sistema di Hilbert.** — Il recente lavoro di Hilbert, che abbiamo sopra indicato, contiene un nuovo punto di vista sul modo d' introdurre la nozione di congruenza. Mentre il Pasch introduce come primitiva la nozione di *congruenza fra figure qualsiasi,* ed il Veronese soltanto *fra segmenti*, nel sistema di Hilbert figurano come primitive le nozioni di *congruenza fra segmenti e fra angoli.* E si hanno così i seguenti postulati che, a meno dell' ordine e di qualche amplificazione fatta allo scopo di raggiungere maggior semplicità nello svolgimento della teoria, coincidono con quelli proposti da Hilbert:

1) Se un segmento è congruente ad un altro, anche il secondo è congruente al primo.

2) Se un angolo è congruente ad un altro, anche il secondo è congruente al primo.

3) Due segmenti congruenti ad un terzo sono congruenti fra loro.

4) Due angoli congruenti ad un terzo sono congruenti fra loro.

5) Ogni segmento AB è congruente a sè stesso indipendentemente dal suo verso, cioè:

$$AB \equiv AB \equiv BA.$$

6) Ogni angolo (ab) è congruente a sè stesso indipendentemente dal suo verso, cioè:

$$(ab) \equiv (ab) \equiv (ba).$$

7) Sopra ogni retta r', a partire da un suo punto qualunque A', e da ciascuna delle due parti, esiste uno ed un solo segmento congruente ad un segmento AB appartenente alla retta r.

8) Dato un raggio a, uscente da un punto O, in ogni piano che lo contiene, e da ciascuna delle due parti, esiste uno ed un solo raggio b uscente da O, e

tale che l' angolo (ab) resulti congruente ad un dato angolo $(a'b')$.

9) Se AB, BC sono due segmenti consecutivi della stessa retta r (cioè aventi un estremo e nessun altro punto comune), $A'B'$, $B'C'$ altri due segmenti consecutivi sulla retta r', e si ha $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$, si ha pure $AC \equiv A'C'$.

10) Se (ab), (bc) sono due angoli consecutivi dello stesso piano π (cioè aventi il vertice e un lato in comune), $(a'b')$, $(b'c')$ altri due angoli consecutivi in uno stesso piano π', e si ha $(ab) \equiv (a'b')$, $(bc) \equiv (b'c')$, si ha pure $(ac) \equiv (a'c')$.

11) Se due triangoli hanno rispettivamente congruenti due lati e l' angolo compreso, hanno rispettivamente congruenti anche i terzi lati e gli angoli opposti ai lati congruenti.

Notiamo subito che dai postulati 6 e 11 segue l' eguaglianza degli angoli alla base del triangolo isoscele, e che i post.i 9 e 10 enunciano, in sostanza, la proposizione:

« Somme o differenze di segmenti, o di angoli, rispettivamente eguali, sono eguali ».

Aggiungiamo che il post.° 11, che lega il concetto di congruenza fra segmenti con quello di congruenza fra angoli, si potrebbe dare, come nel lavoro di Hilbert, sotto forma più semplice, concedendo a priori soltanto la congruenza degli angoli opposti ai lati eguali, e non quella dei terzi lati, che segue immediatamente dalla prima e dal post.° 8; qui si è preferito completarlo anche con questa parte, giacchè essa discende, come l' altra, dalla stessa dimostrazione empirica col movimento.

Definita ora l' eguaglianza di due triangoli come eguaglianza dei lati e degli angoli compresi fra i lati rispettivamente eguali, passiamo ad esporre le altre due proposizioni sulla congruenza dei triangoli.

I. *Sono congrui due triangoli che hanno rispettivamente congrui un lato e i due angoli adiacenti.*

Siano i due triangoli ABC, $A'B'C'$ che abbiano

$$AB \equiv A'B', \quad \widehat{CAB} \equiv \widehat{C'A'B'} \quad \widehat{CBA} \equiv \widehat{C'B'A'}.$$

Dico che i due triangoli sono congrui. Basta provare che è $CA \equiv C'A'$, perchè il teorema resulti dimostrato in base al post.° 11.

Se non fosse $CA \equiv C'A'$, si potrebbe determinare sul raggio AC un punto C'' tale che fosse

$$AC'' \equiv A'C'.$$

Dal confronto dei triangoli $C''AB$ $C'A'B'$ si avrebbe allora

$$\widehat{C''BA} \equiv \widehat{C'B'A'}$$

e perciò anche (post.° 4)

$$\widehat{CBA} \equiv \widehat{C''BA},$$

contro il post.° 8.

II. *Due triangoli sono congrui, se i lati dell' uno sono rispettivamente congrui ai lati dell' altro.*

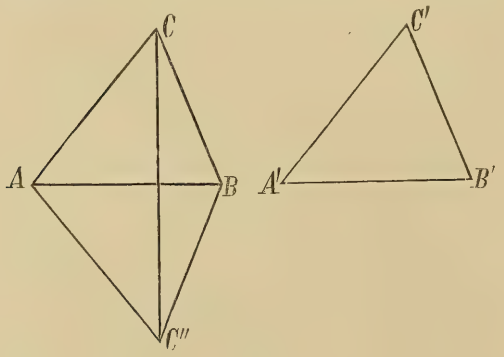


Fig. 2.

Siano i due triangoli ABC $A'B'C'$ (Fig. 2) che abbiano

$$AB \equiv A'B',$$
$$AC \equiv A'C',$$
$$BC \equiv B'C'.$$

Dico che i due triangoli sono congruenti.

Nel piano ABC, e dalla parte opposta a quella dalla quale si trova il punto C rispetto ad AB, determiniamo

l' angolo $\widehat{BAC''} \equiv \widehat{C'A'B'}$ e prendiamo $AC'' \equiv A'C'$. Dai triangoli BAC'', $C'A'B'$ segue allora

$$C''B \equiv C'B' \quad \widehat{AC''B} \equiv \widehat{A'C'B'}.$$

Costruito il segmento CC'', si osservi che i triangoli CAC'', CBC'' sono isosceli ed hanno perciò eguali gli angoli alla base. Per l' osservazione fatta sopra, relativa al post. 10, tanto nel caso che il segmento CC'' incontri il segmento AB, quanto nel caso che incontri il suo prolungamento, si conclude

$$\widehat{AC''B} \equiv \widehat{ACB}.$$

Ma si ha:

$$\widehat{AC''B} \equiv \widehat{A'C'B'},$$

dunque

$$\widehat{ACB} \equiv \widehat{A'C'B'},$$

e per il post.° 11, i due triangoli dati sono congruenti.

§ 5. — **Principali proposizioni sulle perpendicolari.** — Aggiungeremo ancora alcune considerazioni per mostrare, come, basandosi sul sistema di Hilbert, od anche su quello di Pasch, si possano ottenere le principali proposizioni sopra le perpendicolari.

Incominciamo dal dimostrare il

Teor. I. *Angoli adiacenti* [1] *di angoli eguali sono eguali.*

Siano i due angoli eguali (ab) $(a'b')$ (Fig. 3) di vertici O, O', e consideriamo i loro adiacenti (a_1b), $(a_1'b')$. Dico che

$$(a_1b) \equiv (a_1'b').$$

[1] Per angolo *adiacente* d' un angolo dato intendiamo, come di ordinario, quello compreso da uno dei lati dell' angolo dato, e dal prolungamento dell' altro lato al di là del vertice.

Infatti presi tre punti qualunque A, B, A_1 sui raggi a, b, a_1 rispettivamente, determiniamo sui raggi a', b, a_1' i punti A', B', A_1' in modo che sia

$$OA \equiv O'A' \quad OB \equiv O'B' \quad OA_1 \equiv O'A_1'.$$

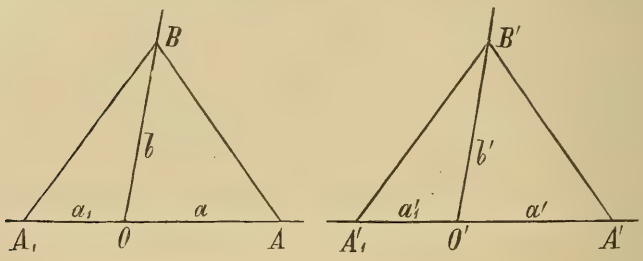


Fig. 3.

Condotti poi i segmenti AB, A_1B, e i corrispondenti $A'B'$, $A_1'B'$, dai triangoli eguali BOA_1 $B'O'A_1'$ segue

$$BA_1 \equiv B'A' \quad \widehat{BAO} \equiv \widehat{B'A'O'};$$

quindi sono eguali anche i triangoli BAA_1, $B'A'A_1'$, e si ha:

$$A_1'B \equiv A_1'B'.$$

Considerando allora l' altra coppia di triangoli BOA, $B'O'A_1'$ si trova che hanno i tre lati rispettivamente eguali e se ne conclude:

$$(a_1b) \equiv (a_1'b');$$

come si voleva dimostrare.

Cor. Due angoli opposti al vertice sono eguali.

Infatti, due angoli opposti al vertice sono adiacenti del medesimo angolo.

Def. Un *angolo* dicesi *retto*, se è uguale ad uno de' suoi adiacenti [1].

---

[1] L' esistenza di un angolo retto si desume poi dal Teor. III.

Osserviamo che, pel Cor. precedente, se un angolo è eguale ad uno dei suoi adiacenti, è eguale anche all' altro.

Teor. II. *Gli angoli retti sono eguali.*

Siano dati i due angoli retti (ab), $(a'b')$ (Fig. 4). Dico che

$$(ab) \equiv (a'b').$$

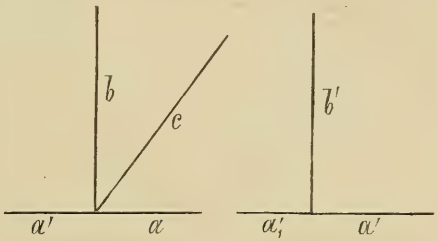


Fig. 4

Infatti, se non è $(ab) \equiv (a'b')$, si potrà determinare dalla stessa parte di a dalla quale si trova b, un raggio c distinto da b, e tale che

$$(ac) \equiv (a'b').$$

Allora, essendo, pel teor. I,

$$(a_1c) \equiv (a_1'b'),$$

e per definizione

$$(a_1'b') \equiv (a'b') \equiv (ac),$$

resulta:

m) $$(a_1c) \equiv (ac).$$

Ma è anche

n) $$(a_1b) \equiv (ab);$$

ed è facile vedere che le due relazioni m) n) sono in contradizione l' una coll' altra. Essendo invero non congruenti i due angoli (ac) (ab), sarà, per esempio,

$$(ac) < (ab) \text{ e } (a_1c) > (a_1b),$$

e per la n)

$$(a_1c) > (ac)$$

che contradice alla m). I due raggi b, c non possono dunque esser distinti, e il teorema rimane dimostrato.

Teor. III. *Per un punto A, non appartenente a una retta a, passa una, ed una sola retta perpendicolare ad a* (Fig. 5).

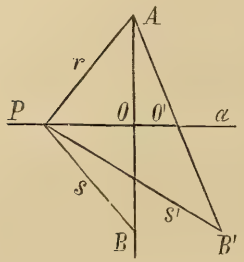


Fig. 5

Scelto infatti un punto qualunque P su a, uniamo i punti A, P e chiamiamo r il raggio PA. Determiniamo poi nel piano Aa, e dalla parte opposta a quella dalla quale si trova A, il raggio s per P, tale che

$$(ra) \equiv (sa)$$

e il punto B tale che

$$PA \equiv PB.$$

Unito A con B, è chiaro che la AB è perpendicolare alla a perchè dai due triangoli eguali APO, BPO resulta

$$\widehat{AOP} \equiv \widehat{BOP}.$$

Questa perpendicolare poi è unica perchè ogni altra retta AB' che incontrasse a in O' e che fosse perpendicolare ad a, quando si fosse fatto dall' altra parte $O'A' \equiv O'A$, e si indicasse con s' il raggio PB', darebbe evidentemente:

$$(ra) \equiv (s'a) \quad PA \equiv PB'$$

donde

$$(sa) \equiv (s'a) \quad PB \equiv PB';$$

ossia i punti BB' non sono distinti, e quindi un' altra perpendicolare non può esistere.

Teor. IV. *Per un punto A di una retta a, passa una ed una sola perpendicolare ad a.*

Questa è infatti la retta per A facente con a un angolo eguale ad un angolo retto; e che sia unica resulta evidente dai postulati e dal teor. II.

Non ci dilungheremo più oltre nell' esposizione della teoria basata sui postulati di Pasch o su quelli di Hilbert, sembrandoci sufficiente il saggio che ne abbiamo dato. Avvertiremo soltanto, riferendoci più particolarmente al sistema di Hilbert, che si potrebbe, in questo indirizzo, edificare tutta la teoria della congruenza nello spazio. A questo scopo occorrerebbe però, come in Veronese, parlare del *verso* delle figure, per distinguere la congruenza diretta ed inversa. Per semplificare la trattazione didattica, potrebbe convenire di introdurre come primitivo anche il concetto di congruenza fra diedri, aggiungendo qualche postulato ad esso relativo.

§ 6. **Considerazioni didattiche comparative.** — Termineremo con poche osservazioni comparative sui tre metodi che abbiamo esposto.

Dal punto di vista teorico, il metodo di Veronese realizza evidentemente un progresso su quello di Pasch, perchè l' idea di congruenza fra segmenti è più semplice dell' idea di congruenza fra figure qualsiasi; ma, nel campo didattico, lo svolgimento della teoria, quando si prendano a punto di partenza i postulati di Veronese, riesce forse più complicato di quello che si ottiene partendo dai postulati di Pasch.

È tuttavia una difficoltà didattica comune ai due metodi quella d' introdurre fin da principio il concetto astratto di corrispondenza. Tale difficoltà si può dire eliminata, o per lo meno attenuata, col metodo di Hilbert, dove non è necessario, fino dai primi passi, il confronto fra figure qualsiasi, ma si può procedere gradatamente a definire la congruenza fra triangoli e fra poligoni, arrivando, se mai, in fine, alla definizione generale.

Ma soprattutto noi temiamo che sostituendo il concetto intuitivamente chiaro della relazione di congruenza angolare con una definizione (partendo dal punto di

vista di Pasch o di Veronese), non si riesca a dare un' idea immediatamente comprensibile di tale relazione. E d' altronde ci sembra anche che i postulati stessi, pur formulati indipendentemente dal concetto di congruenza angolare (ad esempio quello di Veronese per la congruenza fra coppie di rette), si basino, in sostanza, sull' intuizione di tale concetto.

E perciò noi incliniamo a credere che sia meglio introdurre addirittura questa nozione come intuitiva.

Concludendo, ci sembra che la via di Hilbert che, in un certo senso, sta di mezzo fra quella di Pasch e quella di Veronese, si possa adottare sistematicamente nell' insegnamento della Geometria, riuscendo, forse più delle altre, vantaggiosa dal punto di vista didattico.

ARTICOLO QUARTO

« **Sulle applicazioni del postulato della continuità nella Geometria elementare** » di GIUSEPPE VITALI a Pisa.

§ 1. **Il postulato della continuità.** — Le proprietà che si riattaccano ai nostri concetti intuitivi di retta, piano, segmento, angolo, congruenza, trovano la loro formulazione in un sistema di postulati [1] che non fa appello all' idea che ci formiamo della *continuità* dello spazio.

Vi sono dunque altri fatti intuitivi che non possono dedursi da quelli accennati, di cui citiamo qualche esempio:

1.° Se in un segmento di retta due punti si muovono descrivendo il segmento in senso opposto, essi si incontrano in un punto.

2.° Nel piano si possono concepire *curve chiuse* C che lo dividono in due *regioni*, l' una di *punti interni*, l' altra di *punti esterni*, in modo che se A, B sono due punti del piano l' uno interno e l' altro esterno, il segmento rettilineo AB che congiunge i due punti A e B abbia sempre un punto (almeno) comune colla curva C.

---

[1] Cfr. Articoli 2, 3.

3.° Se nel piano è data una curva chiusa C, una qualsiasi *curva* avente un punto interno ed uno esterno a C, ha almeno un punto comune con C.

Queste ed altre proprietà intuitive analoghe si riattaccano al nostro concetto grossolano della *continuità* dello spazio. Sarebbe certo difficile di precisare tutto ciò che includiamo in questa nozione complessa; ma potremo domandare di desumerne qualche enunciato preciso (suscettibile d' essere introdotto come postulato) dal quale si deducano le fondamentali proprietà intuitive che si riattaccano nella nostra mente a quella nozione. A tal fine facciamo la seguente considerazione.

In un segmento di retta AB un punto C determina due segmenti AC, CB. Se si pensa di considerare il punto C come appartenente ad uno solo dei due segmenti AC, CB si ha una *divisione in parti* del segmento AB la quale gode delle seguenti proprietà:

1.° Ogni punto del segmento AB appartiene ad *una* delle due parti.

2.° Il punto A appartiene ad una delle parti (che diremo la *prima*) ed il punto B all' altra; il punto C può appartenere indifferentemente all' una o all' altra parte secondo il fissato.

3.° Ogni punto della prima parte precede ogni punto della seconda nell' ordine AB del segmento.

Per generalità si può considerare anche il caso in cui il punto C cada in A o in B.

Pensando allora il punto C, rispettivamente nei due casi, come appartenente alla prima o alla seconda parte, si ha ancora una divisione in parti che soddisfa alle proprietà enunciate, dove una delle parti è costituita dall' estremo A o B del segmento e l' altra da tutti i punti rimanenti di esso.

Ora, considerando attentamente la reciproca della precedente proposizione, si vede che essa, benchè non

discenda logicamente dalle proprietà segmentarie enunciate nell' art. 2, si trova in accordo coll' idea che ci formiamo della continuità della retta. In seguito a ciò noi ammetteremo il seguente *postulato* [1].

Se un segmento di retta AB è diviso in due parti, in guisa che:

1.° ogni punto del segmento AB appartenga ad **una** *delle due parti,*

2.° l' estremo A appartenga alla prima parte e B alla seconda,

3.° un punto qualunque della prima parte preceda un punto qualunque della seconda, nell' ordine AB del segmento:

esiste un punto C del segmento AB (che può appartenere all' una o all' altra parte), tale che ogni punto di AB che precede C appartiene alla prima parte, ed ogni punto di AB che consegue a B appartiene alla seconda parte nella divisione stabilita.

Se una delle parti è costituita del solo punto A o B, il punto C è il detto estremo A o B del segmento.

Osservazione. Il postulato introdotto si può dire rispondente al primo dei fatti intuitivi sopra menzionati. Invero le due parti in cui il segmento AB è diviso, si possono pensare come descritte da due diversi punti che si muovono in senso opposto andandosi incontro. Il punto d' incontro verrebbe qui ad essere contato come appartenente ad ambedue le parti, ma può immaginarsi attribuito ad una sola (e tolto dall' altra) e ciò deve farsi per conservare l' ipotesi posta sulla data divisione in parti.

Dal postulato già posto, il quale enuncia una proprietà dei segmenti di retta, si può dedurre logicamente

[1] Cfr. R. Dedekind « *Stetigkeit und irrationale Zahlen* ». Braunschweig. 1872.

una proprietà analoga per gli angoli e per gli archi di cerchio.

Si sa che un angolo si può pensare descritto da un raggio uscente dal suo vertice o come l'insieme dei raggi che rappresentano le diverse posizioni del raggio mobile che lo descrive.

Se noi consideriamo un angolo convesso limitato dai raggi a e b, e conduciamo la retta che congiunge un punto A del raggio a con un punto B del raggio b, vediamo che i punti del segmento finito AB di questa retta vengono a corrispondere biunivocamente ai raggi dell'angolo, quando si consideri come corrispondente di un raggio dell'angolo il punto in cui questo raggio incontra il segmento AB. Ed è da notarsi che, supposto l'angolo ab generato da un raggio mobile partito da a e corrispondentemente il segmento AB generato da un punto mobile partito da A, i punti del segmento AB si susseguono nello stesso ordine che i raggi corrispondenti dell'angolo ab (art. 2).

Ond'è che se si pensa l'angolo ab diviso in due parti, in guisa che:

1.° ogni raggio dell'angolo ab appartenga ad una delle due parti,

2.° l'estremo a appartenga alla prima parte e b alla seconda,

3.° un raggio qualunque della prima parte preceda un raggio qualunque della seconda,

i punti corrispondenti del segmento AB si trovano anch'essi divisi in due parti tali che:

1.° ogni punto del segmento AB appartiene ad una delle due parti,

2.° l'estremo A appartiene alla prima parte e B alla seconda,

3.° un punto qualunque della prima parte precede un punto qualunque della seconda.

Ma allora esiste un punto C del segmento AB (che può appartenere all' una o all' altra delle due parti) tale che ogni punto di AB che precede C appartiene alla prima parte ed ogni punto di AB che consegue C appartiene alla seconda parte nella divisione stabilita. Il raggio c corrispondente a C ha, rispetto alla supposta divisione in parti dell' angolo ab, la proprietà che ogni raggio dell'angolo ab che precede c appartiene alla prima parte ed ogni raggio di ab che consegue c appartiene alla seconda. Il raggio c apparterrà poi, a seconda dei casi, all' una o all' altra parte.

La proprietà ora dimostrata per un angolo ab convesso, vale manifestamente anche per gli angoli piatti e concavi. Intanto un angolo piatto o concavo si può sempre pensare come l' insieme di due angoli convessi adiacenti.

Ora se ad db sono due tali angoli convessi e quindi ab è l' angolo completo che noi supponiamo diviso in parti, in guisa che:

1.° ogni raggio dell' angolo ab appartenga ad una delle due parti,

2.° l' estremo a appartenga alla prima parte e b alla seconda,

3.° un raggio qualunque della prima parte preceda un raggio qualunque della seconda, si presentano tre ipotesi:

1.ª Il raggio d è tale che tutti i raggi che lo precedono appartengono alla prima parte e quelli che lo seguono appartengono alla seconda.

2.ª Il raggio d è seguito da qualche raggio della prima parte. In questo caso l' angolo db si trova diviso in parti colle stesse leggi con cui è diviso in parti l' angolo ab. Ma l' angolo db è convesso e quindi esiste un raggio c dell' angolo db (che può appartenere all' una o all' altra delle due parti) tale che ogni raggio

di *db* che precede *c* appartiene alla prima parte ed ogni raggio di *db* che segue *c* appartiene alla seconda, il quale raggio *c*, poichè nella divisione dell' angolo *ab* in parti i raggi dell' angolo *ad* appartengono tutti alla prima parte, è tale che ogni raggio di *ab* che precede *c* appartiene alla prima parte ed ogni raggio di *ab* che segue *c* appartiene alla seconda nella divisione stabilita dell' angolo *ab*.

3.ª Il raggio *d* è preceduto da qualche raggio della seconda parte. In questo caso, con osservazioni analoghe a quelle fatte nel caso precedente (scambiando l' angolo *db* con l' angolo *ad*) si arriva ancora alla conclusione che esiste un raggio *c* dell'angolo *ab* (che può appartenere all' una o all' altra delle parti in cui è diviso l' angolo *ab*) tale che ogni raggio di *ab* che precede *c* appartiene alla prima parte ed ogni raggio di *ab* che consegue *c* appartiene alla seconda parte.

Ho detto che si ha una proposizione analoga al postulato introdotto anche per gli archi di cerchio.

Consideriamo su di un cerchio di centro *O* un arco i cui estremi siano *A* e *B*. I punti di quest' arco si possono far corrispondere biunivocamente ai raggi uscenti da *O* e che passano per essi. Questi raggi riempiono un angolo limitato dai raggi uscenti da *O* e passanti per *A* e per *B*, i quali indicheremo con *a* e *b*. E qui pure è da notarsi che, supposto l' angolo *ab* generato da un raggio mobile partito da *a* e corrispondentemente l'arco *AB* generato da un punto mobile partito da *A*, i raggi dell' angolo *ab* si susseguono nello stesso ordine che i punti dell' arco *AB*.

Ond' è che se si pensa l' arco *AB* diviso in due parti in guisa che:

1.° ogni punto dell' arco *AB* appartenga ad una delle due parti,

2.° l' estremo *A* appartenga alla prima parte e *B* alla seconda,

3.° un punto qualunque della prima parte preceda un punto qualunque della seconda,

i raggi corrispondenti dell' angolo ab si trovano anch' essi divisi in due parti tali che:

1.° ogni raggio dell' angolo ab appartiene ad una delle due parti,

2.° l' estremo a appartiene alla prima parte e b alla seconda,

3.° un raggio qualunque della prima parte precede un raggio qualunque della seconda.

Ma allora esiste un raggio c dell' angolo ab (che può appartenere all' una o all' altra parte) tale che ogni raggio di ab che precede c appartiene alla prima parte ed ogni raggio di ab che segue c appartiene alla seconda parte. Il punto C in cui il raggio c incontra l' arco AB ha rispetto alla supposta divisione in parti dell' arco AB la proprietà che ogni punto dell' arco AB che precede C appartiene alla prima parte ed ogni punto dell' arco AB che consegue C appartiene alla seconda. Il punto C apparterrà poi, a seconda dei casi, all' una o all' altra parte.

Il postulato introdotto in questo paragrafo dicesi *postulato della continuità* (o di Dedekind).

§ 2. **Divisibilità del segmento e dell' angolo.** — La prima applicazione che noi faremo del postulato di Dedekind sarà la dimostrazione della *divisibilità del segmento in n parti uguali*, dimostrazione indipendente dalla ordinaria costruzione che si basa sul postulato delle parallele.

In modo affatto analogo si dimostrerà la *divisibilità in n parti uguali dell' angolo o dell' arco di cerchio*, sostituendo, nel ragionamento relativo al segmento, le parole *punto* e *segmento* colle parole *raggio* e *angolo*, o rispettivamente colle parole *punto* ed *arco*.

Avvertiremo anzitutto che in base ai postulati della congruenza (art. 3) si riesce a dimostrare la divisibilità del segmento, dell'angolo o dell'arco di cerchio in 2, e quindi in 2^p, parti uguali.

La bisezione può infatti ottenersi:

1) Pel segmento AB, costruendo (in un piano per AB) due segmenti AC, BD uguali, perpendicolari ad AB, situati da parti opposte della retta, e considerando l'intersezione del segmento CD con AB.

2) Per l'angolo, prendendo sui due lati, a partire dal vertice, due segmenti uguali, e bisecando la base del triangolo isoscele così determinato.

3) Per l'arco di cerchio riportandosi all'angolo al centro.

Ora dimostriamo la divisibilità del segmento in n parti uguali, dato il postulato della continuità.

Sia AB un segmento di retta ed n un numero intero. Io dico che esiste un segmento tale che il suo n^{mplo} uguagli il segmento AB. Per questo concepiamo il segmento AB ordinato da A verso B, e diviso in due parti in guisa che, essendo H un punto della prima parte si abbia $nAH < AB$, e che, essendo K un punto della seconda parte si abbia $nAK \geq AB$. È manifesto che questa divisione in parti soddisfa alle condizioni per l'applicabilità del postulato di Dedekind e quindi esiste un punto M tale che ogni punto di AM appartiene alla prima parte ed ogni punto di MB alla seconda. Io dico che $nAM = AB$.

Supponiamo che sia per esempio $nAM < AB$. In questo caso dentro il segmento AB cadrà un punto C tale che $nAM = AC$. Prendiamo dopo M un punto M' tale che $nMM' < CB$ (il che può farsi manifestamente). Si avrà allora $nAM + nMM' < AC + CB$, ossia $nAM' < AB$, il che è assurdo perchè il punto M' seguendo il punto M deve essere $nAM' > AB$.

Dunque non può essere $nAM < AB$. In modo analogo si esclude che sia $nAM > AB$. Abbiamo perciò senz' altro $nAM = AB$. Come abbiamo avvertito si dimostra analogamente la divisibilità in n parti uguali dell' angolo o dell' arco di cerchio [1].

§ 3. **Proposizione d' Archimede.** — Una seconda proposizione che si dimostra come applicazione del postulato di Dedekind è quella che comunemente si ammette sotto il nome di *Postulato di* Archimede. Il suo enunciato è il seguente:

Dati due segmenti esiste sempre un multiplo dell' uno maggiore dell' altro.

Per dimostrarlo cominciamo col trasportare uno dei segmenti sulla retta dell' altro in guisa che vengano ad avere un estremo in comune e che cadano entrambi dalla stessa banda rispetto a questo estremo. Dopo ciò siano per esempio AB e AC i due segmenti ed $AB < AC$. (Fig. 1). Noi dobbiamo provare che esiste un numero (intero) n per cui si ha $nAB > AC$.

Fig. 1.

Supponiamo che ciò non sia vero; allora esistono nel segmento AC dei punti B (non coincidenti coll' estremo A) tali che scelto un intero n, comunque grande, $nAB < AC$.

Basiamoci sull' ipotesi precedente per mostrare che essa conduce all' assurdo.

---

[1] Questa divisibilità non si può dimostrare indipendentemente dalla continuità, pur ammettendo tutti i postulati che stanno a base delle ordinarie costruzioni della Geometria elementare, perchè la divisione non è effettuabile cogli strumenti riga e compasso (cfr. art. 13).

I punti del segmento AC si possono pensare distribuiti in due parti: 1.° punti H per cui non esiste un numero (intero) n tale che sia $nAH > AC$; 2.° punti K per cui esistono dei numeri n (interi) pei quali è $nAK > AC$. Questa divisione in parti soddisfa alle condizioni per l'applicazione del postulato di Dedekind, e quindi esiste un punto M tale che i punti di AM appartengano alla prima parte e quelli di MC alla seconda. Allora, prendendo in MC un punto Y per modo che sia $MY < AM$; il punto medio X di AY cadrà in AM ed apparterrà perciò alla prima parte, mentre esistendo un numero (intero) n per cui $nAY > AC$, si ha $2nAX > AC$.

Questo assurdo dimostra la proposizione d'Archimede. La dimostrazione esposta è dovuta a Stoltz.

§ 4. **Intersezioni di una retta con un circolo.** — Un altro fatto che si dimostra pure coll'applicare il postulato di Dedekind è il seguente:

Se una retta ha un punto interno ed uno esterno ad un cerchio, essa ha due punti comuni col cerchio (1).

Prima di svolgere la dimostrazione, notiamo come in base ai postulati della congruenza (art. 3) si possano ritenere note le proprietà relative alle perpendicolari e alle oblique, conseguenze del teorema « se un triangolo ha un angolo retto o ottuso, il lato opposto ad esso è maggiore di ciascuno degli altri due e viceversa », ed inoltre la proprietà per cui « in un triangolo un lato è minore della somma degli altri due »; e ciò indipendentemente dal postulato delle parallele.

(1) Questa proposizione compare implicitamente come un postulato negli *Elementi* di Euclide. D'altronde essa non può dedursi dai postulati relativi alla congruenza, i quali corrispondono alle costruzioni effettuabili col *trasportatore di segmenti*, e quindi permettono di stabilire soltanto un caso particolare di essa, cioè il caso in cui la retta passi per il centro del circolo (cfr. art. 10).

Ora, consideriamo un cerchio C di centro O ed una retta r che abbia il punto A *interno* ed il punto B *esterno* al cerchio e che può supporsi non passante per O. Per definizione, se R è il raggio del cerchio si ha:

$$OA < R, \quad OB > R.$$

Conduciamo da O sulla retta r la perpendicolare OP (Fig. 2). Siccome in un triangolo rettangolo un cateto è sempre minore dell'ipotenusa si avrà (se P è diverso da A)

$$OP < OA,$$

e quindi in ogni caso

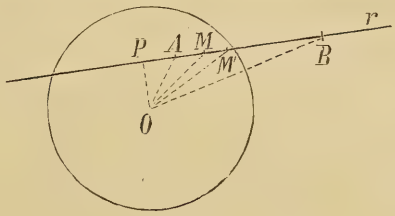


Fig. 2.

$$OP < R,$$

ossia P è interno al cerchio.

Fissiamo la nostra attenzione sul segmento finito PB. Esso può essere diviso in due parti, ponendo nella prima i punti H pei quali è $OH < R$ (punti interni a C), nella seconda i punti K pei quali $OK \geq R$ (punti esterni a C o su C).

Ora, ricordando che di due oblique, condotte da un medesimo punto ad una retta, è maggiore quella che ha proiezione maggiore, possiamo affermare che tutti i punti del segmento PB che precedono un punto interno a C sono interni a C e quelli che seguono un punto posto su C, o esterno a C, sono esterni a C. Ma allora pel postulato della continuità esiste sul segmento PB un punto M tale che tutti i punti che lo precedono appartengono alla prima parte e quelli che lo seguono alla seconda.

Dico che il punto M è comune alla retta r ed al cerchio C, ossia che

$$OM = R.$$

Supponiamo per esempio che sia $OM < R$. Esisterà un segmento σ minore della differenza fra R e OM. Consideriamo il punto M' susseguente ad M, pel quale

$$MM' = \sigma.$$

È certo

$$OM' < OM + MM'$$

poichè un lato di un triangolo è minore della somma degli altri due; ma

$$OM + MM' = OM + \sigma < R,$$

dunque

$$OM' < R,$$

il che è assurdo. In modo analogo si cadrebbe in assurdo supponendo che sia

$$OM > R.$$

Bisogna dunque concludere, come si voleva, che

$$OM = R.$$

Dimostrato così che sul segmento finito PB c'è un punto M comune alla retta r ed al cerchio C, si vede subito che c'è un altro punto che gode di questa proprietà, ed è il simmetrico di M rispetto a P, sicchè possiamo concludere che un cerchio ed una retta che passi per un suo punto interno (e per uno esterno) hanno due punti in comune.

§ 5. **Intersezioni di due circoli.** — Una questione analoga alla precedente si presenta per le intersezioni di due cerchi. Si ha che:

Se in un dato piano, un cerchio C ha un punto X interno ed un punto Y esterno ad un altro cerchio C', i due cerchi si tagliano in due punti.

Dimostrazione. Siano O ed O' i centri dei due cerchi ed R e R' i loro raggi. La retta OO' incontra il cerchio

C in due punti A e B. Manifestamente uno di questi punti (per esempio A) è interno a C' e l'altro esterno [1]. Il cerchio C viene diviso dai punti A e B in due semi-

---

[1] Infatti uno di questi punti può cadere o sul prolungamento di OO' dalla parte di O o sul segmento finito OO' o sul suo prolungamento dalla parte di O'.

Supponiamo dapprima che A si trovi nel 1.° caso (Fig. 3). Allora

$$AO' = AO + OO' = R + OO' \quad (1).$$

Ma dal triangolo $OO'Y$ si ha

$$O'Y < OY + OO'$$

e poichè

$$O'Y > R' \text{ ed } OY = R,$$

si ha

$$R' < R + OO'.$$

Segue (1) che

$$AO' > R$$

ossia che A è *esterno* al cerchio C'.

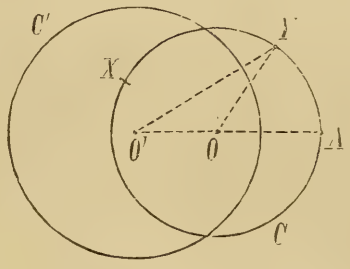


Fig. 3.

Se A si trova nel secondo caso si ha (Fig. 4):

$$OO' = OA + AO' = R + AO' \quad (2).$$

Ma dal triangolo $OO'X$ si ricava

$$OO' < OX + O'X$$

e, ricordando che

$$OX = R \quad O'X < R',$$

anche

$$OO' < R + R'$$

e per la (2)

$$R + AO' < R + R'$$

e quindi

$$AO' < R'.$$

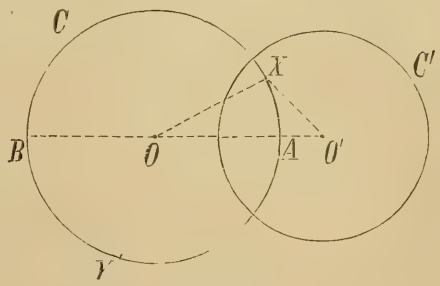


Fig. 4.

In questo caso A sarebbe *interno* a C'.

cerchi (Fig. 6). Consideriamone uno qualunque e immaginiamolo (per fissarne un senso) descritto da un punto che si muova da A verso B. Prendiamo poi su di esso due punti distinti P e Q e supponiamo (per fissare le idee) che P preceda Q. Confrontando i due triangoli $OO'P$, $OO'Q$ vediamo che essi hanno a comune il lato OO', che

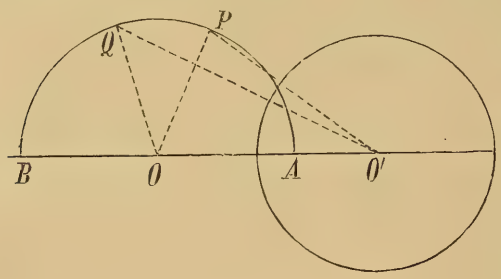


Fig. 6.

$$OP = OQ$$

e che infine

$$\widehat{POO'} < \widehat{QOO'}.$$

Se A si trova nel terzo caso si ha (Fig. 5):

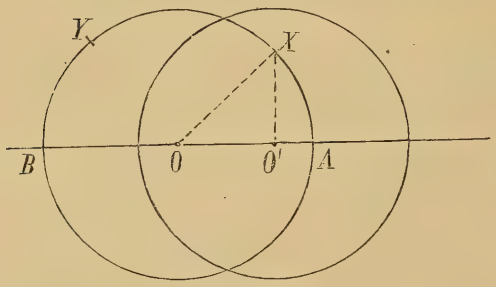


Fig. 5.

$$OA = OO' + O'A$$

ossia

$$R = OO' + O'A \quad (3).$$

Ma dal triangolo $OO'X$ si ricava

$$OX < OO' + O'X,$$

ossia

$$R < OO' + R',$$

dunque è (per la (3))

$$OO' + O'A < OO' + R'$$

ossia

$$O'A < R'$$

e perciò anche in questo caso A è *interno* a C'.

Ora è da notarsi che uno dei due punti A, B si trova nel primo caso e l'altro in uno degli altri due. Bisogna dunque concludere che uno dei due punti A, B è esterno a C' e l'altro invece è interno.

Ma sappiamo che se due triangoli hanno due lati uguali e l' angolo compreso disuguale essi hanno il terzo lato disuguale e precisamente minore quello che si oppone ad angolo minore, dunque possiamo concludere che

$$O'P < O'Q.$$

Ma allora, concepito il suddetto semicerchio diviso in due parti, in guisa che i punti della prima parte sieno interni a C' e quelli della seconda esterni o su C', si vede che sono soddisfatte le condizioni per l' applicabilità del postulato di Dedekind [1] e quindi che esiste un punto M che separa le due parti. Io dico che $O'M = R'$. Supponiamo infatti che sia invece per esempio $O'M < R'$. Allora, indicata con σ la differenza fra R' ed $O'M$, prendiamo sul semicerchio un punto M' che sussegua ad M e tale che la corda MM' non superi σ [2]. Dal triangolo $O'MM'$ si avrebbe

$$O'M' < O'M + MM' \leq O'M + \sigma$$

e quindi

$$O'M' < R'.$$

---

(1) Nel § 1 si è dimostrato come il postulato di Dedekind enunciato per i segmenti di retta sia vero anche per gli archi di cerchio.

(2) Per trovare un tal punto si procederà come segue (Fig. 7): 1.° Conduciamo per M una retta diversa da OM e prendiamo su di essa un segmento MP uguale alla metà di σ. 2.° Congiungiamo O con P e costruiamo un altro raggio OQ in guisa che l'angolo $\widehat{POQ}$ risulti uguale all' angolo $\widehat{MOP}$.

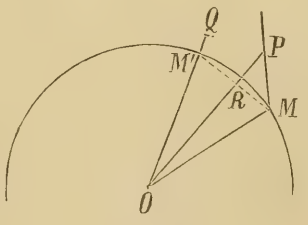


Fig. 7.

Il punto M', intersezione del semicerchio col raggio OQ, è tale appunto che $MM' \leq \sigma$.

Infatti la retta MM' incontra ortogonalmente il raggio OP in un punto R, e dal triangolo rettangolo MRP risulta $MR \leq MP$ (il segno d' uguaglianza vale soltanto se R coincide con P) ossia $MR \leq \frac{\sigma}{2}$. Ma MR è la metà di MM', dunque $MM' \leq \sigma$.

Ma allora un punto M' dell' arco MB sarebbe interno a C', il che è assurdo. Si capisce che con un simile ragionamento si proverebbe che non può essere $O'M > R'$. Si deve dunque concludere che $O'M = R'$. Resta così provato che ognuno dei due semicerchi in cui abbiamo diviso il cerchio C incontra in un punto il cerchio C' e che quindi i due cerchi C e C' hanno due punti a comune c. v. d.

Osservazione. Un altro modo di dimostrare la medesima proposizione, si avrebbe riconducendo la determinazione delle intersezioni di due cerchi a quella delle intersezioni di uno dei cerchi colla retta, asse radicale dei due (cfr art. 9).

§ 6. **Sulla teoria della misura.** — Il principio della continuità trova infine la sua completa applicazione nella teoria della misura.

Consideriamo una semi-retta r avente una certa *origine* O, e su questa, a partire da O, riportiamo ogni segmento dato.

Fissiamo su r un punto A e conveniamo di assumere il segmento OA come segmento *unitario*. Allora se $\frac{m}{n}$ è un numero frazionario qualunque (m ed n essendo interi e positivi) diremo che il segmento m^{plo} della n^{esima} parte di OA (v. § 2.°) ha per *misura* il numero $\frac{m}{n}$.

Ma non tutti i segmenti sono multipli di OA o di una sua parte aliquota. Per esempio se OB è uguale alla diagonale del quadrato di lato uguale ad OA, esso non ammette certo un numero frazionario che si possa chiamare la sua misura nel senso predetto. Però è da notarsi che se OB è un segmento che non ammette per misura un numero frazionario esistono dei segmenti aventi misura frazionaria, maggiori e minori di OB, i quali

differiscono da OB di quanto poco si vuole. Ed invero se MN è un segmento piccolo a piacere, sappiamo che esiste un numero intero e positivo n tale che $nMN > OA$ (v. proposizione di Archimede) e che quindí se indichiamo con C un punto tale che OC sia l' n^{esima} parte di OA (§ 2.°), è $OC < MN$. Ora indichiamo con m il più grande numero intero e positivo pel quale è

$$mOC < OB,$$

e siano B' e B'' due punti tali che

$$mOC = OB'$$

ed

$$(m+1)OC = OB''.$$

Manifestamente OB ed OB' hanno misure frazionarie; sono uno minore e l' altro maggiore di OB, ed hanno fra loro, e quindi da OB, una differenza minore di MN.

Possiamo dunque formare due successioni di segmenti a misura frazionaria, la prima costituita da segmenti minori di OB, l' altra da maggiori, in modo che, fissato un segmento piccolo a piacere, i segmenti delle due successioni, da un certo punto in poi, abbiano da OB una differenza minore di quel segmento.

Le misure dei segmenti di queste due successioni costituiscono manifestamente due *classi convergenti* di numeri *razionali*, le quali definiscono un numero *irrazionale*. Questo numero si assume come *misura* del segmento OB.

In tal modo noi veniamo a far corrispondere ad ogni segmento un numero positivo, razionale, che esprime la sua misura, nel senso definito.

D' altra parte si è visto che ogni numero razionale è la misura di un segmento.

Dimostriamo ora che anche un numero irrazionale positivo è sempre la misura di un segmento determinato, sicchè come ad ogni segmento corrisponde un numero positivo, anche ad ogni numero positivo corrisponde un segmento.

Consideriamo due serie convergenti di numeri razionali le quali definiscano un numero irrazionale positivo α. Corrispondentemente ai numeri razionali delle due serie avremo dei segmenti, uscenti da O, che li avranno per misura. I punti estremi di questi segmenti saranno tali che quelli corrispondenti ai numeri della serie crescente saranno minori di quelli corrispondenti ai numeri della serie decrescente. Inoltre non vi possono essere due punti distinti M ed N che seguano tutti i punti corrispondenti alla serie crescente e precedano tutti quelli corrispondenti all' altra. Invero, supposto che M preceda N, si può trovare, come è occorso di provare poc' anzi in questo stesso paragrafo, un punto X che segua M e tale che OX abbia misura frazionaria e differisca da OM di meno di MN. Il punto X cade certo fra M ed N. Ma la misura di OX è un numero razionale e quindi O è minore di qualche numero della classe crescente o maggiore di qualcuno dell' altra, a seconda che è minore o maggiore di α. Dunque, o M precede qualche punto corrispondente alla serie crescente, o N segue qualche punto corrispondente all' altra.

Pertanto, fatta eccezione al più per un sol punto particolare, un punto della nostra semiretta, o precede qualche punto corrispondente alla serie crescente, o segue qualche punto corrispondente all' altra. Si può quindi dividere la semiretta in parti, in guisa che la prima contenga tutti i punti che precedono qualche punto corrispondente alla serie crescente, e la seconda tutti i rimanenti. Indicato con L un qualsiasi punto della seconda parte, si otterrà in tal modo, nel segmento OL, una

divisione soddisfacente alle condizioni richieste pel postulato di Dedekind. Si troverà così un punto Y che separa le due parti di OL, e quindi anche le due parti della semiretta r. Questo punto Y non precede alcun punto corrispondente alla serie crescente o non segue alcuno corrispondente all' altra, ed è l' unico che goda questa proprietà.

Questo punto ha per misura (in virtù della definizione data) precisamente il numero α.

Possiamo dunque asserire che anche ogni numero irrazionale positivo è la misura di un determinato segmento.

ARTICOLO QUINTO

« **Sulla teoria dell' equivalenza** » di Ugo Amaldi a Bologna.

§ 1. **Considerazioni generali sulle grandezze geometriche.** — Nella geometria si presentano varie classi di enti, cui appartengono i caratteri che riconosciamo nelle *grandezze,* cioè le proprietà relative ai concetti di *somma, eguaglianza* e *diseguaglianza.*

La più semplice classe di grandezze geometriche è costituita dai *segmenti.* Le proprietà della congruenza segmentaria (art. 3.°) permettono infatti, in modo immediato, di riguardare i segmenti, astrazion fatta dalla loro posizione, come grandezze: due segmenti congruenti appariscono come *grandezze eguali* e viceversa, e la proprietà per cui « *somme di segmenti congruenti sono congruenti* » si traduce allora in un carattere insito al concetto di grandezza « *somme di grandezze eguali sono eguali* »; le relazioni inerenti all' ordine dei punti d' una retta e alle proprietà determinative della congruenza (art. 3.°), danno il criterio di confronto dei segmenti, che serve a stabilire le definizioni di *maggiore* e *minore,* in modo rispondente al concetto di grandezza. Quello che abbiam detto dei segmenti si può analogamente

ripetere per gli angoli (cfr. art. 3.°) dove similmente la congruenza si traduce in eguaglianza di grandezze, ecc.

Nuove classi di grandezze geometriche scaturiscono dalla considerazione delle *superficie* e dei *volumi*; dove per altro i concetti di *congruenza* e di *egual grandezza (equivalenza)* sono ben distinti, essendo il secondo molto più comprensivo. Nondimeno a queste classi appartengono particolari proprietà, analoghe a quelle spettanti alla classe dei segmenti, onde esse appariscono *continue* e quindi *misurabili* (art. 4.°).

Così le suddette classi di grandezze geometriche possono riferirsi al *tipo* delle grandezze segmentarie (o dei *numeri* che le rappresentano) nel senso che si può porre una *corrispondenza* tra superficie e segmenti, o volumi e segmenti, dove si mantengano le relazioni di *somma, eguaglianza* e *diseguaglianza.*

La concezione delle superficie e dei volumi come grandezze, è pienamente conforme alla nostra intuizione geometrica; quindi le relazioni logiche, inerenti al concetto fondamentale di grandezza, si traducono per esse in proprietà così evidenti, che appariscono una pura espressione di principii logici.

Tale apparenza è per altro illusoria, giacchè l'assegnare i nominati enti geometrici alla categoria delle grandezze, involve tacitamente un postulato, il quale deve essere messo in luce; sia che esso vogliasi, sulla base dell'intuizione, senz'altro concedere, sia che si tenti di ricondurlo con un procedimento dimostrativo ad altri postulati già innanzi concessi e segnatamente a quelli esprimenti le proprietà dell'eguaglianza segmentaria.

In qual modo questo punto di vista critico si sia affacciato nella Geometria, ed in quali sviluppi abbia trovato la sua attuazione, apparirà dal breve cenno

storico che segue, e dalle teorie di cui diamo ragione nei successivi §§ [1].

§ 2. **Equivalenza dei poligoni.** — Negli *Elementi* di Euclide, della relazione di *eguaglianza* e *diseguaglianza* non è fatta parola nè tra le definizioni, nè tra i postulati; esse vi sono introdotte come relazioni di natura primitiva ed irriducibile, e solo dopo l' enumerazione delle definizioni e dei postulati, posti a fondamento dell' edificio geometrico euclideo, vi sono enunciate esplicitamente quelle volgari proprietà dell' *eguaglianza*, che nel corso delle deduzioni saranno successivamente invocate ed applicate. Di codeste *Nozioni Comuni* (κοιναὶ ἔννοιαι) quelle che, secondo lo Heiberg, non si debbono ad apocrifa interpolazione, sono le seguenti:

1.ª *Enti eguali al medesimo ente sono eguali fra loro.*

2.ª *Se ad enti eguali si aggiungono enti eguali si ottengono somme eguali.*

3.ª *Se ad enti eguali si tolgono enti eguali, rimangono resti eguali.*

4.ª *Enti, che possono essere portati a coincidere, sono eguali.*

5.ª *Il tutto è maggiore di una sua parte.*

In Euclide manca ogni giustificazione di codesta pluralità di criteri stabiliti a riconoscere l' *eguaglianza* geometrica, perchè la compatibilità di essi, è considerata senz' altra consentita, in quanto le cinque proposizioni suindicate si intendono desunte direttamente dalla *Logica*, fondamento primitivo ed inconcusso di ogni speculazione scientifica.

---

[1] Si troverà un' accurata bibliografia relativa all' equivalenza (fino all' anno 1897), dovuta al De Zolt, nel *Bollettino* di « *Mathesis* » (anno 1897-98, n. 3).

E ciò avviene perchè l' applicazione sistematica, che di codeste *Nozioni Comuni* è fatta in EUCLIDE, nello studio delle figure geometriche, sottintende implicitamente la *assegnazione a priori di queste alla categoria logica delle grandezze.*

Senza discutere la convenienza di questo modo di procedere, noteremo soltanto che esso turba in certo modo l' armonia dell' edifizio euclideo, ove domina uno spirito tendente ad escludere, nel campo della Geometria, l' applicazione *a priori* dei principî della scienza dei numeri.

L' uso metodico di tali principii caratterizza invece gli *Éléments de Géométrie* del LEGENDRE, nei quali la eguaglianza è introdotta in modo, fuor d' ogni dubbio, assai meno soddisfacente. EUCLIDE non aveva distinto con un nome particolare quella speciale relazione di eguaglianza, che si verifica applicando la IV nozione comune (cioè la *congruenza* o eguaglianza per *sovrapponibilità*). Il LEGENDRE, invece, restrinse il nome di *eguaglianza* a indicare codesta relazione, e sostituì alle *Nozioni* II e III le seguenti definizioni: « *J' appellerai* figures équivalents *celles dont les surfaces sont égales* ». « Surface *est ce qui a longueur et largeur, sans hauteur ou épaisseur* ». Delle quali la prima richiede sia definita l' *eguaglianza di superficie*, mentre la seconda, puramente negativa, non ne dà notizia alcuna.

Due note del GERWIEN [1], nelle quali è provata con effettive costruzioni la possibilità di spezzare due o più poligoni piani o sferici *di eguale area* in parti poligonali *congruenti*, mostrarono quale poteva essere il fondamento di una teoria rigorosa dell'eguaglianza dei poligoni.

[1] *Zerschneidung jeder beliebigen Anzahl von gleichen geradlinigen figuren in dieselben Stücken - Zerschneidung jeder beliebigen Menge verschieden gestaltener figuren von gleichem Inhalt auf der Kugelfläche in dieselben Stücke.* CRELLE'S Journal: X, 1833.

La medesima osservazione, relativa ai poligoni, comparve nel « *Tentamen juventutem studiosam* ecc. » (Maros - Vásárhely: 1832-33) di W. Bólyai. Ivi è pure data una dimostrazione, per superficie qualsivogliano, dei due teoremi:

I) *Le parti non comuni a due superficie congruenti, che in parte si ricoprono, sono decomponibili in parti a due a due congruenti.*

II) *Se da due superficie congruenti si tolgono due parti congruenti, i resti sono decomponibili in parti a due a due congruenti.*

Il teorema II è un facile corollario del I: ma la dimostrazione che il Bólyai diede del I è insufficiente, in quanto conduce, in un numero grandissimo di casi, a suddivisioni in infinite parti. Ad ogni modo importa notare che, qualora sin dapprincipio si fosse tenuto conto di codesto tentativo del Bólyai, la teoria dell' equivalenza avrebbe potuto ricevere un assetto rigoroso qualche decennio prima.

Nelle *Geometrische Untersuchungen* del Lobatscefskij è conservata la distinzione introdotta dal Legendre tra *eguaglianza (congruenza)* ed *equivalenza*: come criteri di riconoscimento vi sono assunti, per la prima la *Nozione Comune* IV (*sovrapponibilità*), per la seconda le *Nozioni* II e III insieme *(somma e differenza di figure congruenti)*.

Tuttavia, sino a questo punto, nessuno ancora aveva rivolto la propria attenzione con intendimenti critici sulle basi della teoria euclidea dell' *eguaglianza* (*equivalenza* e, come caso particolare, *congruenza*). Il primo ad intraprendere siffatto studio fu il Duhamel [1]. Egli, nel suo esame dei principî della scienza dell'estensione, notò

[1] *Des méthodes dans les sciences de raisonnement* — Deuxième partie - Paris, Gauthier-Villars. Cfr. in particolar modo i Capitoli I e V e la *Note sur l' équivalence*. Pagg. 445-450.

anzitutto la necessità di definire, per ciascuna delle classi di figure che si studiano nella Geometria, i concetti di *somma* e di *parte*, e di *maggiore* e *minore*, ed osservò, a questo proposito, che dopo siffatte definizioni, la *Nozione Comune* V perde il suo carattere di *verità desunta dall' intuizione* (*verité de sentiment*) per diventare una semplice verità di definizione. Egli, inoltre, mise in luce l'opportunità di ridurre ad uno solo i vari criteri, che Euclide introduce a riconoscere l'*eguaglianza*: perciò, riserbando, come già il Legendre e il Lobatschefskij, il nome di *eguaglianza* a designare la sovrapponibilità o *congruenza*, propose di indicare col nome di *equivalenza* la relazione, che intercede tra figure, *somme di figure a due a due rispettivamente uguali.* Sulla base di codesta definizione, il Duhamel svolse i primi teoremi di equivalenza tra poligoni (I Libro degli *Elementi*), e in particolare, proibendo a sè stesso l' uso della *Nozione Comune III (eguaglianza delle differenze di enti eguali*), sostituì alla dimostrazione euclidea del teorema: « *Parallelogrammi di egual base e di eguale altezza sono equivalenti* » una dimostrazione, nella quale i due parallelogrammi vengono decomposti in uno stesso numero di parti congruenti, facendo uso del *postulato* d'Archimede (art. 4).

Sullo schema del Duhamel fu svolta per intero la teoria dell' *equivalenza* dal Faifofer nei suoi *Elementi di Geometria.* È dalla prima edizione di codesto trattato, apparsa in luce nel 1880, che trasse occasione uno studio critico del De Zolt [1], nel quale è finalmente reso possibile un assetto rigoroso per la teoria dell' equivalenza.

---

[1] *Principii della eguaglianza di poligoni (equivalenza di poligoni) preceduti da alcuni cenni critici sulla teoria della equivalenza geometrica.* — Milano. Briola, 1881. Cfr. ancora: A. De Zolt — *Principii della eguaglianza di poliedri e di poligoni sferici.* — Milano - Briola, 1883.

La dimostrazione apagogica, che il Faifofer dava del teorema: « *Se due triangoli sono equivalenti ed hanno lati eguali, anche le altezze relative sono eguali fra loro* » dipende in modo essenziale dalla proposizione che « *due rettangoli aventi basi eguali e altezze diseguali non sono equivalenti.* » Ora il De Zolt osservò che, a giustificare codesta asserzione, è necessario o *postulare* esplicitamente o *dimostrare* un principio geometrico, che egli enuncia nei termini seguenti: « *Se un poligono è diviso in parti in un modo qualsivoglia, non è possibile, trascurando alcuna di esse parti, disporre le rimanenti in modo da coprire interamente il poligono* ». A questa proposizione, enunciata anche per figure geometriche che non siano poligoni, daremo il nome, di *principio del* De Zolt.

Ora, in quale relazione sta il principio del De Zolt col concetto, per cui si attribuisce alle superficie dei poligoni il carattere di grandezze?

Per rispondere a tale domanda, osserviamo che pei poligoni (e per le superficie in generale) resta definita immediatamente la *somma,* dall' operazione geometrica, consistente nel collocare i due poligoni l' uno accanto all' altro, in modo che abbiano comune soltanto una parte del contorno, ma non altri punti.

Quando poi si cerca di definire l' equivalenza e la non equivalenza dei poligoni, affinchè i poligoni stessi possano essere considerati come formanti una classe di grandezze, si deve tener conto delle seguenti condizioni:

1.ª poligoni congruenti debbono essere riguardati come equivalenti, se si vuol mantenere alla congruenza il carattere di sostituibilità nelle deduzioni geometriche, che ad essa è proprio;

2.ª somme di poligoni equivalenti, e quindi somme di poligoni congruenti, debbono essere equivalenti;

3.ª un poligono deve essere maggiore e quindi *non equivalente*, ad una sua parte.

La possibilità d' introdurre una definizione di equivalenza e di non equivalenza, per i poligoni, soddisfacendo alle nominate condizioni, involve, dipendentemente dalla condizione 3.ª, la sussistenza di un principio, al quale spetti, nella serie delle deduzioni geometriche, quell' ufficio, che, sulla base della definizione del Duhamel, ha il principio del De Zolt.

Stabilita la necessità di porre (per postulato o per dimostrazione) un cotale principio, resta ancora da fissare una definizione dell' equivalenza dei poligoni, conciliabile colle condizioni sovraindicate.

Ma tale definizione non è, veramente, arbitraria, perchè, le dette condizioni conducono a fissare i concetti di *maggiore* e *minore,* e quindi anche il concetto della equivalenza, ove si tenga conto della condizione che « *due grandezze di cui l' una non è maggiore dell' altra sono equivalenti* ».

Per altro la via che così viene indicata (applicabile alle superficie in genere) non è la più semplice che si possa seguire per la teoria dell' equivalenza dei poligoni. Il fatto fondamentale che « *poligoni equivalenti sono decomponibili in uno stesso numero di poligoni congruenti* » permette di dare per l' equivalenza di essi una definizione diretta e semplice.

La quale sembra invero la base naturale di questa teoria.

Ma non è forse fuor di luogo osservare che questa definizione riposa sopra un fatto contingente, quale è quello sopra enunciato: la considerazione delle superficie come grandezze (che è qui in questione) non assicura *a priori* la possibile decomponibilità in parti congruenti; anzi questa proprietà non sussiste per le superficie in genere (cfr. § 7), onde la definizione d' equivalenza data per i poligoni dovrà essere modificata, quando si passi a considerare altre superficie.

§ 3. **Sguardo storico alle dimostrazioni del principio del De Zolt.** — Il De Zolt, nel suo primo opuscolo, tentò di risolvere il problema se al principio da lui enunciato spettasse, nella serie delle deduzioni geometriche, l'ufficio di teorema o di postulato; e, per dimostrare codesto principio, svolse alcune considerazioni, che chiariscono e, in certo modo, precisano il contenuto intuitivo di quello, ma non hanno assolutamente nè carattere, nè valore di effettiva dimostrazione geometrica.

Il De Paolis nei suoi « *Elementi di Geometria* » assunse la proposizione del De Zolt, enunciata per le « *grandezze* » in generale, come *postulato* (1).

Il Faifofer, invece, tentò dapprima una nuova dimostrazione (2); egli si propose di provare *direttamente e con effettive costruzioni* il teorema del Bólyai che « *sottraendo da due poligoni equivalenti due loro parti, che siano congruenti ad un terzo poligono, si ottengono resti equivalenti* » e a questo scopo stabilì un procedimento di successive suddivisioni dei due poligoni primitivi. Ma, come osservò il De Paolis (3), la dimostrazione del Faifofer, come già quella del Bólyai, non escludeva il caso che codesto procedimento potesse *prolungarsi indefinitamente*. Essendosi così palesata la fallacia della dimostrazione proposta, lo stesso Faifofer nelle successive edizioni dei suoi « *Elementi* » introdusse la proposizione del De Zolt come *postulato*.

---

(1) *Elementi di Geometria*. Torino, Loescher, 1884, pag. 281.

(2) *Dimostrazione di una proposizione fondamentale della teoria dell' equivalenza*. Periodico di Matematica, I, pag. 13.

(3) *Sopra una proposizione fondamentale della teoria dell' equivalenza*. Periodico di Matematica, I, pag. 44.

Nelle medesime obiezioni incorrono, come osservò il Lazzeri, le dimostrazioni del Gremigni [1].

Una dimostrazione effettiva fu data dallo Schur [2].

Il concetto fondamentale di questa dimostrazione, comune a quelle successivamente date del principio del De Zolt, consiste nello stabilire la possibilità di considerare i poligoni come grandezze, ponendo una *corrispondenza (proporzionalità) fra i poligoni ed i segmenti, per la quale alla somma di due poligoni corrisponda la somma dei segmenti omologhi.*

Una tale corrispondenza permette, infatti, di *trasportare* ai poligoni le relazioni di equivalenza (e non equivalenza) definite per i segmenti, in guisa da soddisfare alle proprietà fondamentali 1) 2) 3) citate nel precedente §; così, in particolare, si deduce il principio del De Zolt.

Per stabilire la corrispondenza sopra menzionata, lo Schur ricorre alla *trasformazione* di un qualsiasi poligono in un rettangolo di data base, divisibile in uno stesso numero di parti congruenti (cioè *equivalente* al poligono dato), mostrando che tale trasformazione conduce ad un rettangolo *determinato.*

Che ciò basti allo scopo risulta senz' altro chiaro, dall' esame della corrispondenza fra i rettangoli di data base ed i segmenti che ne sono le altezze.

---

(1) *Gli elementi di Euclide.* Libro primo. Firenze, Lemmonnier, 1893, *A proposito del postulato dell' equivalenza e di altre questioni geometriche* - *Riv. di Mat.* 1893; e molti altri opuscoli.

(2) *Sitzungsberichten der Dorpater Naturforscher Gesellschaft.* - Jhrg. 1892. Cfr. la traduzione italiana: « *Sull' area delle figure piane limitate da linee rette* » *Per. di Mat.* VIII: pag. 153. L' esposizione soverchiamente concisa di questa Nota è completata dalla Nota del Biasi: « *Ancora sulla equivalenza dei poligoni* » *(Per. di Mat.* IX: pag. 85), nella quale l' A. espone alcuni dettagli del metodo dello Schur, da questi stesso a lui comunicati.

Quanto ai particolari della dimostrazione, lo Schur, dopo aver dimostrato, che se i lati di un rettangolo sono gli estremi, e i lati di un altro rettangolo i medi di una proporzione, i due rettangoli sono equivalenti, chiama *area* di un triangolo il rettangolo, che ha un lato eguale ad un segmento prefissato qualsivoglia h e l' altro eguale alla quarta proporzionale dopo questo segmento h, un lato del triangolo e la metà della corrispondente altezza. Allora, applicando il teorema dianzi enunciato, dimostra che l' area di un triangolo è equivalente ad esso e non dipende dalla scelta del lato, da cui si parte nella costruzione. Di qui risulta che triangoli di area eguale sono equivalenti. Poi all' area dei triangoli dà un segno, il quale è positivo o negativo a seconda che il senso, in cui si intende descritto il contorno, lascia l' interno del triangolo a sinistra o a destra.

Dimostra allora il teorema fondamentale: « *La somma algebrica delle aree dei triangoli che hanno per base i lati di un poligono e per vertice comune un punto del suo piano, è indipendente dalla scelta di questo punto* ». Da ultimo, assunta come *area* di un poligono la somma (algebrica) di rettangoli, precedentemente dimostrata costante, fa vedere che, diviso in qualsivoglia modo un poligono in parti poligonali, *la somma delle aree delle parti è sempre eguale all' area del poligono.*

Alla dimostrazione dello Schur è affatto simile quella proposta dal Rausenberger [1], il quale, per altro, pare non avesse avuto notizia della dimostrazione dello Schur. La differenza, di importanza esclusivamente *didattica*, tra le due dimostrazioni, sta in ciò, che il Rausenberger, anzichè riferire l' insieme dei poligoni all' insieme dei

---

[1] *Das Grundproblem der Flächen- und Rauminhaltslehre.* – Math. Ann. 1893; XLII, 275-284.

rettangoli (dotati di segno) aventi una determinata altezza, presuppone nota la teoria della misura dei segmenti, e introduce l' area (*Flächenwerth*), come una funzione numerica degli elementi (*Bestimmungsstücke*) dei poligoni. Qui la proposizione del De Zolt si presenta come immediata traduzione di una elementarissima proprietà dei numeri.

A ciascuna delle due accennate dimostrazioni si può riattaccare la dimostrazione del Gérard [1]. Se v ed O indicano un *vettore* ed un punto di un piano qualsivoglia, del quale si consideri una faccia determinata, si designa col nome di *momento del vettore v rispetto al punto O* il prodotto della lunghezza (*tensore*) del *vettore v* per la distanza di O dalla linea d' azione di v, preso positivamente o negativamente, secondo che O cade a sinistra o a destra della linea di azione di v, considerata nel verso di v.

Il Gérard, fissato come positivo sul perimetro di un poligono qualsivoglia P (a contorno non intrecciato) il senso che lascia a sinistra l' interno di esso, chiama *momento del poligono P, rispetto ad un punto O* qualsivoglia del piano di P, la somma dei momenti rispetto ad O dei vettori complanari che costituiscono il perimetro di P. Usando allora del *teorema del* Varignon (« *il momento del vettore* risultante *è eguale alla somma dei momenti dei vettori* componenti »), che egli presuppone stabilito indipendentemente da ogni considerazione di area, dimostra che il *momento di P non dipende dal punto del piano di P, rispetto al quale è stato preso.* È allora immediatamente chiaro che, quando P sia decomposto in qualsivoglia modo in un numero k di *parti poligonali*

---

[1] *Sur le postulat relatif à l' équivalence des polygones considéré comme corollaire du théorème de Varignon* — Bull. de la Soc. Math. de France; 1895, XXIII, pagg. 268-269.

$P_1, P_2 \ldots, P_k$, *il momento di* P *è eguale alla somma dei singoli momenti di* $P_1, P_2, \ldots P_k$. Ottenuto questo risultato, è ovvia la deduzione del *principio del* De Zolt.

Carattere più nettamente geometrico di quelle accennate sin qui ha la dimostrazione del Lazzeri [1], la quale è bensì costrutta sullo schema di quella dello Schur, ma ha su di questa evidenti vantaggi didattici. In particolare non vi entrano in considerazione le aree negative, e vi è ridotto al minimo (non per altro bandito) l' uso della teoria della proporzionalità.

Simultaneamente alla dimostrazione del Lazzeri ne fu pubblicata un' altra dal Veronese [2], la quale ai pregi, che ha comuni con la prima, di non far uso nè di aree negative, nè di concetti di misura, unisce il vantaggio di una maggiore semplicità. Perciò scegliamo quest' ultima per una distesa esposizione, che daremo nel § susseguente.

§ 4. **Dimostrazione del Veronese del principio di De Zolt per i poligoni.** — Supponiamo nota la teoria delle proporzioni e teniamo ferma la seguente

Definizione. — *Due poligoni diconsi* **equivalenti**, *se sono somme di parti poligonali, ciascuna a ciascuna rispettivamente congruenti.*

Allora fissato un segmento qualsivoglia h e dato un triangolo ABC, *trasformiamo* quest' ultimo in un triangolo equivalente al dato e avente un' altezza eguale ad h. È nota la costruzione che a ciò si richiede. Fissato uno dei lati, per es. AC del dato triangolo, si conduca, da

---

(1) *Sulla teoria dell' equivalenza geometrica.* Per. di Mat. 1895; fasc. III-IV e V-VI.

(2) *Dimostrazione della proposizione fondamentale dell' equivalenza delle figure.* Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. t. VI: s. VII; 1894-95.

quella banda di AC da cui cade B, la parallela alla distanza h. Si prolunghi uno dei due lati distinti da AC, p. es. AB, fino ad incontrare in E la costrutta parallela. Congiunto E con C, sia BD parallela alla EC. Il triangolo AED soddisfa alle condizioni richieste.

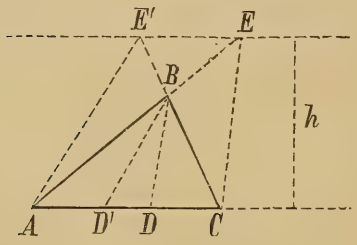


Fig. 1.

Potevamo, invece di AB, prolungare CB: avremmo così ottenuto un triangolo $D'E'C$. Dico che le basi AD e $D'C$ sono eguali. Si ha infatti (Fig. 1):

$$(1) \qquad \begin{aligned} AD : AC &:: AB : AE \\ D'C : AC &:: CB : CE'. \end{aligned}$$

Ma è

$$AB : AE :: CB : CE';$$

onde risulta appunto $AD = D'C$.

Si ottiene ancora come base del triangolo trasformato un segmento eguale ad AD, se nella costruzione suindicata si conduce la parallela ad un lato del triangolo diverso da AC. Partiamo, infatti, anzichè dal lato AC, dal lato AB: la figura costituita dai due lati AB, AC e dalle due parallele ad essi rispettivamente condotte alla distanza h, danno un rombo (Fig. 2): perciò $AE = AE''$. Se AD'' è il segmento, a cui conduce la costruzione fondamentale, eseguita partendo dal lato AB come base, abbiamo

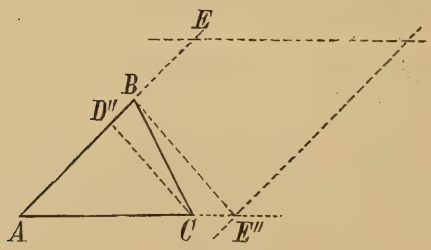


Fig. 2.

$$AD'' : AB :: AC : AE''.$$

Ma dalla (1) discende

$$AD : AB :: AC : AE$$

dunque

$$AD = AD''.$$

Premesse queste osservazioni, è legittimo assumere come *segmento associato al triangolo ABC, rispetto al segmento h*, il segmento AD. Nel seguito di questo § sottintenderemo di riferire tutti i *segmenti associati* ad un medesimo segmento h.

Per brevità chiameremo *divisione per trasversali* ogni divisione in parti di un triangolo, ottenuta con segmenti di retta uscenti dai vertici e limitate ai lati opposti del triangolo primitivo o di quelli successivamente ottenuti.

Lemma I. *Se un triangolo è diviso per trasversali in parti triangolari, il segmento associato al triangolo dato è somma dei segmenti associati ai triangoli ottenuti nel modo anzidetto e di cui il triangolo dato è somma.*

Cominciamo col dimostrare la proposizione nel caso in cui il triangolo dato ABC è diviso in due triangoli per mezzo di una retta passante, p. es., per il vertice B (Fig. 3).

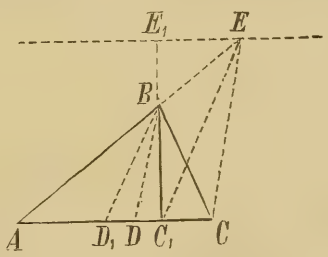


Fig. 3.

Se AD è il segmento associato ad ABC e AD_1 il segmento associato ad ABC_1 abbiamo

$$AD : AC :: AB : AE$$
$$AD_1 : AC_1 :: AB : AE.$$

Ne discende

$$D_1D : C_1C :: AB : AE.$$

Ora costruiamo il segmento C_1X associato al triangolo C_1BC: esso sarà tale che

$$C_1X : C_1C :: C_1B : C_1E_1.$$

Ma, poichè

$$C_1B : C_1E_1 :: AB : AE,$$

sarà

$$C_1X : C_1C :: AB : AE$$

e quindi

$$C_1X = D_1D.$$

Dunque ai due triangoli ABC_1, C_1BC, la cui somma è il triangolo ABC, sono *associati* i segmenti AD_1, D_1D rispettivamente, che hanno per somma il segmento AD associato ad ABC.

Applicando ripetutamente il risultato ora ottenuto, avremo la dimostrazione del *Lemma* enunciato, il quale, in sostanza, asserisce che l' operazione che consiste nell' associare ad ogni triangolo il corrispondente segmento è *distribuitiva* rispetto alla somma, *quando* i triangoli parziali sono ottenuti dal triangolo somma con successive divisioni per trasversali.

Ora quest' ultima restrizione si può togliere per mezzo del seguente

Lemma II. *Qualsivoglia divisione data di un triangolo in triangoli, o una suddivisione di essa in triangoli, si ottiene mediante successive divisioni per trasversali* (1).

Anzitutto è chiaro che si può eseguire con una successione di trasversali ogni divisione di un triangolo, tale che nell' interno del triangolo non cada alcun vertice di triangoli parziali.

---

(1) La dimostrazione, che di questo *Lemma* dà il Veronese si potrà dedurre dalla dimostrazione, dovuta al medesimo autore, dell' analogo *Lemma* relativo ai tetraedri (§ 9). Qui, ad evitare ripetizioni, preferimmo dare la dimostrazione dello Hilbert.

Ora, data una divisione qualsivoglia di un triangolo ABC in triangoli Δ_1, conduciamo da un vertice di ABC, p. es. da A, tutte le trasversali di ABC che passano per i singoli vertici dei triangoli Δ_1. Queste trasversali dividono ABC in un certo numero di triangoli Δ_2 e nello stesso tempo suddividono alcuni dei Δ_1 in triangoli e quadrangoli. Spezzando in due ciascuno di questi ultimi per mezzo di una diagonale, otteniamo una suddivisione dei triangoli Δ_1 in triangoli Δ_3. Ora vogliamo dimostrare che i Δ_3 si ottengono con sole trasversali, sia che partiamo dai singoli Δ_1, sia che partiamo dai singoli Δ_2.

Per questi ultimi è chiaro che dei triangoli Δ_3, in cui è diviso ciascun Δ_2, nessuno ha vertici all' interno.

In secondo luogo, fissato un determinato Δ_1, al suo interno non possono cadere vertici dei Δ_3; perchè le trasversali di ABC considerate si incontrano tutte nel vertice A. Risulta di qui, per l' osservazione fatta dapprincipio, che ciascun Δ_1 e ciascun Δ_2 si può spezzare nei singoli triangoli Δ_3, che lo compongono, con sole trasversali. Poichè ABC è diviso nei Δ_1 per trasversali, il *Lemma* è dimostrato.

Ora consideriamo i seguenti associati al triangolo primitivo ABC e ai singoli triangoli Δ_3. Poichè questi ultimi si ottengono dal primo con sole trasversali, risulta dal *Lemma* I che il segmento associato ad ABC è eguale alla somma dei segmenti associati ai singoli Δ_3. Ma, considerato un qualsivoglia Δ_1, i triangoli Δ_3 che lo compongono, si possono ottenere con sole trasversali, onde la somma dei segmenti associati a questi ultimi è uguale al segmento associato al Δ_1 considerato. Se dunque nella somma di tutti i segmenti associati ai triangoli Δ_3, raggruppiamo i termini corrispondenti ai singoli Δ_1, mettiamo in evidenza che il segmento associato ad ABC è eguale alla somma dei segmenti associati ai singoli triangoli Δ_1. Abbiamo dunque il

Teorema fondamentale. *Diviso in qualsivoglia modo in triangoli un triangolo dato, il segmento associato a quest' ultimo è eguale alla somma dei segmenti associati ai triangoli parziali.*

Corollario. *Se un poligono qualsivoglia si divide in triangoli parziali in due modi diversi, la somma dei segmenti associati ai triangoli della prima divisione, è eguale alla somma dei segmenti associati ai triangoli della seconda.*

Indichiamo infatti con Δ' i triangoli parziali della prima divisione, con Δ'' i triangoli parziali della seconda. Allora, immaginando sovrapposte le due divisioni, ed aggiungendo, eventualmente, nuovi segmenti di divisione, è possibile costruire una suddivisione in triangoli Δ''', tali che aggruppati in un certo modo diano i triangoli Δ', aggruppati in un altro diano i triangoli Δ''. Aggruppando, quindi, corrispondentemente, i termini della somma dei segmenti associati ai singoli triangoli Δ''', possiamo mettere in evidenza una volta l' identità di questa somma con la somma dei segmenti associati ai triangoli Δ', un' altra la sua identità con la somma dei segmenti associati ai triangoli Δ''; e il corollario è dimostrato.

È allora lecito assumere come *segmento associato* ad un qualsivoglia *poligono,* la somma dei segmenti associati ai singoli triangoli di una qualsiasi particolare divisione in parti del poligono. Notiamo che non esiste nessun poligono (a contorno non intrecciato), al quale sia *associato* un segmento nullo.

È poi senz' altro chiaro, che, se un poligono P è diviso in qualsivoglia modo, in parti poligonali P_1, P_2, $P_3 \ldots P_k$, al segmento P è associato un segmento che è somma dei segmenti associati ai singoli poligoni parziali $P_1, P_2 \ldots, P_k$.

Stabilita codesta corrispondenza tra poligoni e segmenti, sarà lecito, per l' osservazione fatta al § 3, con-

cludere che i poligoni costituiscono *un insieme di grandezze.* In particolare, *sarà così stabilita la proposizione del* De Zolt *relativa ai poligoni.*

Osservazione. Risulta dalle costruzioni di questo § che se k è il segmento associato ad un dato poligono rispetto ad un segmento h, ogni triangolo di base k e altezza h si può considerare come ottenuto *trasformando* il poligono primitivo: in altre parole il poligono e il triangolo considerato sono decomponibili in egual numero di parti a due a due rispettivamente congruenti. Se, quindi, due diversi poligoni ammettono, rispetto ad un medesimo segmento h, il medesimo segmento associato k, quei due poligoni, come equivalenti ad un medesimo triangolo, saranno equivalenti tra loro, cioè decomponibili in egual numero di parti a due a due rispettivamente congruenti.

Di qui deriva una conseguenza importante (la cui validità è limitata alle superficie poligonali): dati due poligoni, o essi sono equivalenti, cioè decomponibili in uno stesso numero di parti congruenti, o l'uno di essi è *minore* dell'altro, cioè equivalente ad una sua parte. Infatti due poligoni non equivalenti daranno luogo a due segmenti associati, di cui l'uno è minore dell'altro: onde risulta che uno dei due poligoni è *equivalente ad una parte dell'altro.*

§ 5. **Prismi e poligoni sferici.** — Sia data una classe di figure, per le quali siano definiti i concetti di *somma* e di *parte.* Supponiamo che si possa porre tra le figure di quella classe e l'insieme dei poligoni una corrispondenza, per cui ad ogni figura venga *associato* un poligono, in guisa che, divisa in parti la figura considerata, alle singole parti di essa siano associati poligoni la cui somma è *equivalente* al poligono associato

alla figura primitiva. Definita, per la classe considerata, l' *equivalenza*, come relazione intercedente tra figure, *somme di parti a due a due rispettivamente congruenti,* si conclude che le figure della classe data si possono considerare come *grandezze* (proporzionali ai poligoni associati). Sussisterà quindi per esse anche la proposizione del De Zolt.

Così, p. es., considerando l' insieme di tutti *i prismi aventi una data altezza h*, possiamo associare a ciascun prisma dell' insieme il poligono base. La corrispondenza così posta tra i prismi di altezza h e i poligoni soddisfarà alle condizioni suindicate, *qualora* si definisca come *parte* di un prisma ogni prisma ottenuto dal primitivo con soli piani paralleli agli spigoli laterali di quello.

Ma, più in generale, il Lazzeri, con procedimenti analoghi a quelli da lui stesso seguiti pei poligoni, mostrò che, considerando l' insieme di *tutti i prismi*, si può associare a ciascuno di essi un parallelepipedo rettangolo, avente due spigoli consecutivi rispettivamente eguali a due segmenti dati a e b, determinato ed unico, in guisa che, diviso il prisma in *parti prismatiche* quali si vogliano, i parallelepipedi associati ai singoli prismi parziali hanno per somma il parallelepipedo associato al prisma primitivo [1].

Ora, l' insieme di tutti i parallelepipedi rettangoli, aventi due spigoli consecutivi rispettivamente eguali ad a e b, costituisce un insieme di *grandezze*, come si vede associando a ciascuno dei parallelepipedi considerati il rispettivo terzo spigolo. Discende di qui che anche i prismi sono *grandezze*: per essi, insieme con le altre

---

(1) l. c. pag. 26.

(2) Per un' esposizione completa della dimostrazione cfr. Lazzeri l. c., pag. 19.

proprietà inerenti, sussisterà anche la proposizione del De Zolt, purchè per *parti* di un prisma si intendano le *parti prismatiche* soltanto.

Quanto ai poligoni sferici il Rausenberger (*l. c.*) osserva che sommando sulla sfera due poligoni di *eccesso* ε_1 ed ε_2 rispettivamente, si ottiene un poligono il cui *eccesso* è $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Ne risulta che, se si decompone un poligono sferico in quanti altri si vogliono, l' *eccesso* del tutto è uguale alla somma degli *eccessi* delle sigole parti. Ma l' insieme degli *eccessi* (angoli) è un insieme di *grandezze*: sono quindi *grandezze* (proporzionali agli eccessi) anche i poligoni sferici, e anche per essi varrà, in particolare, la proposizione del De Zolt.

§ 6. **Il cerchio.** — Nella Geometria piana elementare, accanto alle figure a contorno rettilineo, entrano in considerazione le superficie piane a contorno circolare o cerchi. I Geometri greci, non riuscendo ad acquistare, coi criteri e coi metodi usati nello studio dell' *equivalenza* tra poligoni, alcuno analogo risultato relativo al confronto tra cerchi e poligoni, idearono quei procedimenti per infinite operazioni, succedentisi con legge determinata, ai quali noi oggi diamo il nome di *passaggi al limite.* Vedremo, alla fine del presente §, come a stabilire il concetto dell' equivalenza tra cerchi e poligoni sia *necessario* ricorrere a siffatti procedimenti.

Euclide nel Libro XII degli *Elementi,* dopo avere inscritto in un cerchio i poligoni di 4, 8, ..., 2^n, ... lati, dimostra che si può sempre trovare in questa successione un poligono che differisca dal cerchio per una superficie minore di una superficie prefissata qualsiasi. La dimostrazione, che egli dà di questo fatto, dipende in modo essenziale, mediante il *Lemma I* del detto libro, dal *principio di* Archimede relativo alle superficie piane qualsivogliano, che egli tacitamente intende concesso.

Nei trattati moderni il processo logico, col quale si giunge ad analoghe conclusioni, è un po' diverso. Premessa la *teoria dei limiti* pei segmenti, e stabilito, perciò, il *postulato della continuità*, codesta teoria e codesto postulato si *trasportano* all' insieme dei poligoni, mediante la corrispondenza che si può porre tra segmenti e poligoni.

Si dimostra allora che *per ogni cerchio esiste un triangolo maggiore (prevalente) di tutti i poligoni inscritti nel cerchio e minore (suvvalente) di tutti i poligoni circoscritti.* Ma anche il cerchio è minore di tutti i poligoni circoscritti e maggiore di tutti gli inscritti. Se ne conclude che, dividendo in parti in qualsivoglia modo sia il detto triangolo sia il cerchio, non si potrà mai far sì che nell' uno di essi compaiano tutte le parti dell' altro ed altre ancora: in altre parole *il cerchio non è nè maggiore, nè minore del triangolo.*

Allora la concezione delle superficie in genere come *grandezze*, o almeno la concezione che le superficie circolari costituiscano *grandezze* della stessa classe dei poligoni, esige che chiamiamo *equivalenti il cerchio* ed *il triangolo* considerati.

Ma questa equivalenza è una relazione diversa da quella definita per i poligoni; si può ancora chiamarla *equivalenza*, purchè per altro si estenda corrispondentemente il significato della parola.

La necessità di modificare così la definizione d' *equivalenza*, passando dai poligoni a superficie più generali, dipende dal cadere di quella proposizione contingente su cui avevamo appoggiato la teoria dell' equivalenza dei poligoni (cfr. § 2).

Si prende ora come fondamento della nuova definizione, un altro fatto, che ha pur esso un carattere contingente, legato alla *continuità* della classe di grandezze

che stiamo considerando; *il fatto che le superficie di egual grandezza cui riferiamo le nostre osservazioni sono limiti di poligoni equivalenti.*

Definite come *equivalenti* le superficie piane, limiti di poligoni equivalenti, nasce spontanea una domanda: poichè la nuova definizione di *equivalenza* piana, applicata al confronto tra cerchi e poligoni, conduce a risultati, ad ottenere i quali la primitiva è di sua natura insufficiente (cfr. Oss. 2.ª), non potrà accadere che la nuova definizione, applicata al confronto fra poligoni piani, dia luogo a teoremi di *equivalenza* più generali di quelli ottenuti in base alla definizione primitiva?

Codesta possibilità è già implicitamente esclusa dalla osservazione del § 4. Se, infatti, due poligoni sono limiti di poligoni equivalenti, nessuno dei due è minore (nè maggiore) dell' altro, onde i due poligoni sono tra loro equivalenti nel senso che è possibile spezzarli in egual numero di parti poligonali a due a due, rispettivamente, congruenti. Si può dunque concludere che, *rispetto all' insieme dei poligoni piani, ciascuna delle due definizioni date di equivalenza contiene l' altra.*

Osservazione 1.ª — Di diversa natura rispetto a quelle che precedono sono le considerazioni conducenti alla *rettificazione della circonferenza*, ove la nozione di *lunghezza* della circonferenza compare come un nuovo dato dell' intuizione. La definizione di questa lunghezza come il limite del perimetro dei poligoni regolari, inscritti (o circoscritti) alla circonferenza, o come limite di separazione tra le due *classi contigue* di poligoni inscritti e dei poligoni circoscritti, si appoggia sopra una constatazione empirica, legata alla flessione senza estensione di un filo; essa, notiamo, non può essere in alcun modo riattaccata alla concezione *a priori* degli archi di circolo come *grandezze.*

Osservazione 2.ª — È facile provare la *necessità* di ricorrere, pel confronto di cerchi e poligoni, a procedimenti infiniti.

Dato un cerchio C di raggio r e un poligono P, supponiamo che essi siano divisi in un numero finito di parti, a due a due congruenti, e che le rispettive linee di divisione, considerate sia singolarmente, sia nel loro insieme, abbiano una *lunghezza* determinata e finita.

Consideriamo le parti in cui resta diviso C. Alle parti contigue al contorno di C i corrispondenti archi di cerchio C volgono la concavità. Ma potrà, in generale, accadere che tra le linee di divisione di C vi siano anche altri archi di cerchio di raggio r, distinti da quelli che costituiscono la circonferenza di C. È certo che ciascuno di questi ultimi, come interno a C, ad alcune parti volgerà la concavità, e ad altre la convessità, in guisa che, se indichiamo con Λ la lunghezza di C, con λ la somma delle lunghezze degli archi or ora indicati, le somme degli archi di cerchio di raggio r che volgono alle parti di C, di cui formano contorno, la concavità o la convessità saranno date da $\Lambda + \lambda$ e λ rispettivamente.

Ora P, che è diviso in parti rispettivamente congruenti a quelle di C, ha il contorno rettilineo. Quindi ad ogni sua parte che abbia al contorno un arco di cerchio di raggio r saranno contigue una o più altre parti, limitate (parzialmente o totalmente) dal medesimo arco, considerato con opposta curvatura. Perciò le somme degli archi di cerchio di raggio r, che, nella divisione in parti di P, volgono alle parti rispettive la concavità o la convessità, saranno eguali. Ma poichè P è diviso in parti a due a due ordinatamente congruenti a quelle di C, codeste due somme devono essere rispettivamente eguali alle analoghe somme relative a C, onde risulta l'eguaglianza assurda di $\Lambda + \lambda$ e λ. Così, sotto

la restrizione imposta alle linee di divisione, è messa in luce l' *impossibilità di dividere il cerchio ed il poligono in un numero finito di parti a due a due rispettivamente congruenti* (1).

§ 7. **Le superficie piane a contorno qualsivoglia.** — Le medesime questioni che nei §§ precedenti abbiamo considerato per i poligoni e pei cerchi si possono porre anche per figure piane limitate da contorni quali si vogliano.

Per quel che riguarda la questione se le superficie piane costituiscano un insieme di grandezze, osserviamo senz' altro che essa è risoluta affermativamente dai teoremi di *Calcolo infinitesimale sull' esistenza e l' unicità dell' integrale.*

A semplici considerazioni di *Calcolo integrale* si riduce la dimostrazione proposta dal Killing (2).

Egli, supposta data una superficie S qualsivoglia, assume nel piano di S due schiere ortogonali di rette parallele e fra loro distanti della ν^{ma} parte aliquota della unità di misura lineare. Chiamando a_ν e b_ν il numero dei quadrati del reticolato così costruito, che cadono rispettivamente *dentro* e *non fuori* della superficie S, fa vedere che la differenza $\frac{b_\nu}{\nu^2} - \frac{a_\nu}{\nu^2}$ (evidentemente giammai negativa) al crescere indefinito di ν, tende a zero. Di qui risulta che se, al crescere indefinito di ν, uno dei due numeri $\frac{b_\nu}{\nu^2}$ e $\frac{a_\nu}{\nu^2}$ tende ad un limite, anche

(1) Questa assai ovvia osservazione ci è stata suggerita dalle considerazioni del Réthy, di cui è fatto parola nel seguente § 7.

(2) Questa dimostrazione abbozzata dal Killing in « *Nicht-euklidischen Raumformen* - Leipzig, 1885 » fu poi svolta da lui stesso nella « *Einführung in die Grundlagen der Geometrie* - Paderborn, 1898, II Bd. S. 24 u. ff. ».

l' altro ammetterà un limite, e questo sarà eguale a quello [1]. Il Killing, dopo aver dimostrato che questo limite, quando esiste, non varia, comunque si orienti nel piano e si trasporti il reticolato fondamentale, lo assume come *misura* della superficie S data, e fa vedere come, divisa S, in qualsivoglia modo, in *parti che ammettano misura, le misure delle parti* hanno per somma la misura della superficie primitiva. La corrispondenza così stabilita tra le superficie piane e i numeri ci permette di concludere che le superficie piane costituiscono un insieme di *grandezze*. Se, allora, si definiscono come *equivalenti due superficie aventi la stessa misura,* sarà, in particolare, lecito di enunciare la proposizione del De Zolt per ogni superficie avente misura, purchè per *parti* di essa si intendano soltanto superficie, che soddisfacciano alla medesima condizione.

Notiamo che la definizione di *superficie equivalenti*, or ora accennata, si riduce, in sostanza, a quella data nel § precedente nel caso del cerchio.

Noi là vedemmo ancora come sia impossibile ricondurre a considerazioni di spezzamento in parti congruenti il confronto tra cerchi e poligoni. Qui nasce analogamente la questione, più generale, relativa alle condizioni, cui devono soddisfare due superficie qualsivogliano, affinchè siano decomponibili in un numero finito di parti a due a due congruenti. Siffatte condizioni furono determinate dal Réthy.

---

[1] Notiamo, incidentalmente, che il Killing dall' eguaglianza

$$\lim_{\nu = \infty} \frac{b_\nu - a_\nu}{\nu^2} = 0$$

deduce senz' altro che $\frac{b_\nu}{\nu^2}$ e $\frac{a_\nu}{\nu^2}$ *hanno il medesimo* limite, dimenticando il caso, in cui il limite manca, cioè il caso della *non integrabilità.*

Egli si era proposto di dimostrare rigorosamente il teorema del Bólyai: « *Date due superficie congruenti quali si vogliano, e aventi una parte comune, le parti non comuni sono equivalenti* (cioè somme di un numero finito di parti a due a due rispettivamente congruenti) ».

Nel § 1 della sua Memoria « *Endlich-gleiche Flächen* »(1) egli stabilì codesto teorema in base alla seguente notevolissima proposizione, che ci accontentiamo di enunciare, perchè la dimostrazione, alquanto laboriosa, ci allontanerebbe troppo dallo scopo nostro: « *Affinchè due superficie piane equivalenti* (nel senso più largo della parola) *siano decomponibili in uno stesso numero di parti rispettivamente congruenti è necessario e sufficiente, che i due contorni si possano dividere in archi, in guisa che per ogni arco dell' uno vi sia sull' altro un arco congruente e avente (rispetto all' interno della corrispondente superficie) il medesimo senso di curvatura; non tenendosi conto degli archi, che nel contorno di una stessa superficie compaiono un egual numero di volte coi due sensi opposti di curvatura (rispetto alla superficie racchiusa)* ».

Come corollario di codesto teorema, il Réthy osserva, che non è possibile decomporre in un egual numero di parti a due a due congruenti un poligono e una superficie, per la quale gli archi di curva del contorno volgano *tutti* all' interno o la concavità o la conversità. Tali sono, egli dice, il segmento di parabola e il cerchio.

Nel § 2 della medesima Memoria il Réthy volle dimostrare il teorema del Bólyai, « limitando gli strumenti di dimostrazione ». Prese, perciò, a considerare le traslazioni e i ribaltamenti del piano, che sovrappongono due figure direttamente o inversamente congruenti, e, col solo sussidio di siffatti movimenti e mediante la

---

(1) *Berichte der ung. Akad. der Wiss.* 1890; Math. Ann. Bd. 38; 1891.

considerazione dei contorni delle date superficie, « senza far ricorso neppure alla riga ed al compasso », stabilì un procedimento per suddivisioni, diretto a provare, nella sua generalità, il teorema del Bólyai.

Ma il Dobriner [1] osservò che codesto procedimento in certi casi (dei quali uno effettivamente egli assegna) conduce, come quello del Bólyai, ad una serie indefinita di costruzioni. Inoltre notò che negli sviluppi del § 1 della Memoria del Réthy è fatto tacitamente uso di una proposizione, che non è se non il *il principio del* De Zolt per le superficie a contorno qualsivoglia. In uno scritto ulteriore [2] il Dobriner propose una nuova dimostrazione del teorema del Bólyai.

Il Réthy [3] rispose cercando, con nuove osservazioni, di ovviare alle obiezioni opposte al § 2 della sua Memoria; di più volle giustificare la proposizione (principio del De Zolt), che aveva implicitamente ammesso nel § 1; ma a questo scopo fece ricorso alla *V Nozione Comune* di Euclide, cadendo così in una petizione di principio.

Ad ogni modo a noi non giova entrar nei particolari di codesta polemica. Ci basterà l' osservare che i risultati del § 1 della Memoria del Réthy, e in ispecie il teorema enunciato dianzi, sussistono per noi senza eccezione, in quanto abbiamo veduto che la proposizione del De Zolt si può dimostrare direttamente e indipendentemente dal teorema del Bólyai, alla cui dimostrazione mirano le ricerche del Réthy.

---

(1) *Bemerkungen zu der Abhandlung des Herrn M. Réthy über « Endlich-gleiche Flächen »* - Math. Ann. - XLII, 1893.

(2) *Der Satz « Congruentes von Congruentem giebt Gleiches » in seiner Anwendung auf Ebene Flächen* - Math. Ann.; Bd. XLII: 1893; p. 285.

(3) *Ueber endlich-gleiche Flächen* - Math. Ann. - XLII, 1893.

§ 8. **I poliedri.** — Nel Libro XI degli *Elementi* Euclide espone i teoremi di *equivalenza (eguaglianza)* fra parallelepipedi e fra prismi, con metodi di dimostrazione, che sono la immediata generalizzazione di quelli usati nel Libro I per lo studio dei poligoni. Così sono ivi applicati i singoli criteri di riconoscimento dell' *equivalenza*, che sono enunciati dalle *Nozioni comuni.*

A sostituire la supposizione, qui implicita, che l' insieme dei poliedri abbia i caratteri delle grandezze, basta introdurre anche nella Stereometria la proposizione del De Zolt. Nasce dunque anche qui il problema se codesta proposizione *possa essere dimostrata o debba piuttosto esser postulata.*

Ma nasce ancora un' altra questione, analoga a quella insorta nel piano, quando si vollero confrontare cerchi e poligoni. Nè ai Geometri greci, nè ai posteriori riuscì di ricondurre il paragone tra piramidi o tra prismi e piramidi a considerazioni di congruenza. Furono per ciò applicati anche qui procedimenti di limite. Ora la questione, se l' uso di codesti procedimenti sia, nella teoria dell' equivalenza nello spazio, inevitabile, rimane tuttora insoluta. Come unico contributo alla soluzione di codesto problema, che sia giunto a nostra conoscenza, ricordiamo una Nota dello Sforza [1], nella quale, insieme con altri risultati più comprensivi, è dimostrato che *è, in generale, impossibile dividere due tetraedri in parti tetraedriche annodate simili,* o più precisamente che *tra i diedri di due tetraedri, divisibili in parti tetraedriche annodate simili, passa una relazione che non è in generale soddisfatta.* Lo Sforza dice che un tetraedro è diviso in parti tetraedriche *annodate,* quando accade che, se un punto del tetraedro

---

[1] *Un' osservazione sull' equivalenza dei poliedri per congruenza delle parti* - Per. di Mat., 1897, pag. 105.

dato è vertice di un tetraedro parziale esso è anche vertice di tutti gli altri tetraedri parziali a cui appartiene.

Disgraziatamente la dimostrazione, semplice ed elegante, dello Sforza non sembra suscettibile di essere generalizzata al caso delle divisioni in parti (poliedriche) qualsivogliano: ma ci par lecito asserire che è estremamente probabile che, anche nel caso generale, sussista la medesima impossibilità.

Ad ogni modo, la preoccupazione di raccogliere la teoria dell' equivalenza dei poligoni e dei poliedri sotto un unico principio generale suggerì a taluno (e fra questi ricordiamo lo Sbrana) l' idea di porre a base dell' intera teoria dell' equivalenza l' unica definizione: « *Due figure si dicono equivalenti, se possono decomporsi in modo, che ogni parte dell' una abbia la sua corrispondente uguale nell' altra e reciprocamente, sia finito od infinito il numero di queste parti* [1] ».

Così, in effetto, si raggiunge l' unità formale: ma ci permettiamo di dubitare della convenienza didattica di raccogliere in una medesima definizione, quasi si trattasse di due determinazioni coordinate di un medesimo concetto, la nozione *primitiva* di *somma* propriamente detta e la nozione *derivata* di *somma di una serie.*

Ma torniamo oramai alla *proposizione del* De Zolt *relativa ai poliedri.*

La natura delle dimostrazioni pel caso dei poligoni da noi svolte o semplicemente accennate nei §§ 3 e 4, lascia senz' altro presumere la possibilità di condurre analoghe dimostrazioni nello spazio. Così il Rausenberger

---

[1] Sbrana - « *Sulla definizione di equivalenza in Geometria* ». *Riv. di Mat.* 1894, pag. 147 e « Comunicazione *sulla questione VII* ». *Boll. di Mathesis*, 1896-97, pag. 22.

e il Gérard [1] asserirono per le rispettive dimostrazioni codesta possibilità.

Un' effettiva dimostrazione fu ampiamente sviluppata dal Veronese [2]. Egli, seguendo un procedimento perfettamente analogo a quello da lui stesso usato nel piano, dimostra anzitutto che è possibile *associare* ad ogni tetraedro un segmento unico, determinato, e tale che, diviso il tetraedro in parti tetraedriche per mezzo di piani passanti per spigoli del tetraedro primitivo o dei tetraedri successivamente ottenuti, alle singole parti sono associati segmenti, la cui somma dà il segmento associato al tetraedro primitivo. Indi, con effettive costruzioni fa vedere come ogni divisione di un tetraedro in tetraedri parziali, o una suddivisione di questi, si può eseguire, conducendo piani passanti per gli spigoli del tetraedro primitivo o dei tetraedri così successivamente ottenuti, ossia, come nel seguito diremo, *con successive divisioni per piani trasversali.* Da queste due proposizioni discende, come nel piano (§ 4), che *i poliedri formano un insieme di grandezze* e che, quindi, in particolare, vale per essi la proposizione del De Zolt.

Questa dimostrazione, come l' analoga nel piano, prescinde da ogni considerazione di misura. Qualora, per altro, si presupponga nota la teoria della misura dei segmenti e dei poligoni, si può dare alla prima parte della dimostrazione una particolare brevità, seguendo lo schema abbozzato dal Rausenberger (l. c.).

Questo noi faremo nel § seguente.

---

(1) La dimostrazione del Gérard richiede, per poter essere applicata allo spazio, che si dimostri, indipendentemente dal concetto di volume, un teorema, analogo a quello del Varignon, che non ci consta sia mai stato dato.

(2) l. c.

§ 9. **Dimostrazione della proposizione del De Zolt pei poliedri.** — Lemma I. *Ad ogni tetraedro si può* associare *un numero tale che, diviso il tetraedro in tetraedri parziali con successive divisioni per piani trasversali, a questi tetraedri parziali corrispondono numeri, che hanno per somma il numero associato al tetraedro primitivo.*

Sia dato un tetraedro $ABCD$ e consideriamone le due faccie ABC e ABD e le rispettive altezze DH e CH'. Dico che l' area del triangolo ABC sta all' area del triangolo ABD, come la lunghezza (CH') di CH' sta alla lunghezza (DH) di DH. Infatti, condotti da H, H' i segmenti HK, $H'K'$ perpendicolari alla AB, e congiunti C con K', D con K, i triangoli rettangoli $CK'H'$, DKH, avendo gli angoli $CK'H'$, DKH eguali, sono simili, onde risulta

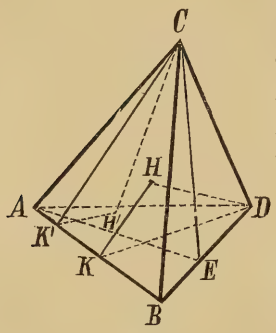


Fig. 4.

$$(DK) : (CK') :: (DH) : (CH').$$

Se moltiplichiamo gli antecedenti di questa proporzione pel numero $\frac{1}{2}(AB)$ otteniamo

$$\frac{1}{2}(AB)\ (DK) : \frac{1}{2}(AB)\ (CK') :: (DH) : (CH') \quad c.\ v.\ d.$$

Se allora definiamo come numero associato ad un tetraedro il prodotto dell' area di una sua faccia per la corrispondente altezza, abbiamo che questo numero non dipende dalla faccia del tetraedro scelta come base. Di più, immaginiamo di avere diviso il dato tetraedro in due per mezzo di un piano ACE passante per lo spigolo AC. Allora, poichè per una parte i due tetraedri così ottenuti $AEBC$ e $ADEC$ hanno comune l' altezza di C e, per l' altra, l' area del triangolo ABD è eguale alla somma delle aree di ABE e di AED, si ha, per la proprietà

distributiva della moltiplicazione dei numeri, che il numero associato ad $ABCD$ è eguale alla somma dei numeri associati ad $AEBC$ e ad $ADEC$. Applicando ripetutamente il risultato ottenuto, si dimostra il *Lemma I.*

Ora dimostriamo, seguendo il Veronese, il

Lemma II. *Ogni divisione di un tetraedro in parti tetraedriche, od una sua suddivisione, si può eseguire con successive divisioni per piani trasversali.*

Premettiamo una osservazione. Diviso un tetraedro in (due) parti con un piano, questa divisione, o una sua suddivisione, si ottiene con *piani trasversali.* Infatti, escluso il caso, in cui già il piano stesso passa per uno spigolo di $ABCD$, restano a considerare tre casi:

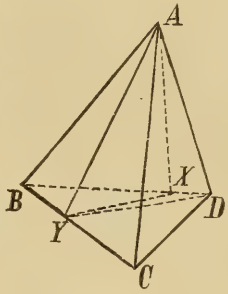


Fig. 5.

I. Il piano passa per un vertice, p. es. A, e divide il tetraedro in una piramide a base quadrilatera $DCYXA$, e in un tetraedro $XYBA$. Una suddivisione *per piani trasversali* della data divisione si ottiene conducendo successivamente i piani ADY e AYX.

II. Il piano taglia due coppie di spigoli opposti, p. es. AB e DC; AC e BD. Allora il tetraedro resta diviso nei due poliedri $BCXYWZ$ e $ADXYWZ$. Conduciamo i due piani BDY e ACZ. Così il poliedro $BCXYWZ$ resta diviso nei tre tetraedri $BXYZ$, $BCYZ$, $CZYW$; e similmente il poliedro $ADXYWZ$ vien diviso nei tre tetraedri $DZYW$, $AZYD$, $AXYZ$. Ora, che questa sia una suddivisione *per piani trasversali* della divisione primitiva si vede costruendo anzitutto il piano BDY e poi

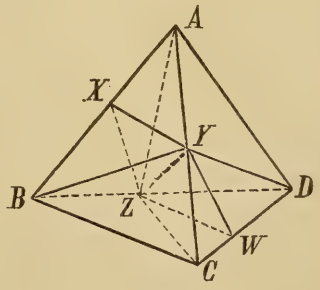


Fig. 6.

nel tetraedro $CBDY$ i piani CYZ e ZYW, nel tetraedro $ABDY$ i piani AYZ, ZYX.

III. Il piano interseca i tre spigoli concorrenti in un vertice, p. es. in A (Fig. 7): esso allora divide $ABCD$ nel tetraedro $AXYZ$ e nel solido $XYZBCD$, il quale alla sua volta si divide in tetraedri per mezzo di piani BYZ e BDY. Basta costruire questi piani nell' ordine BDY, BYZ, YZX per vedere come la suddivisione così ottenuta si eseguisca *con piani trasversali.*

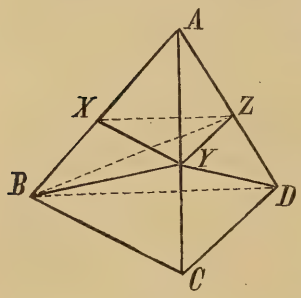


Fig. 7.

Premesso questo, consideriamo una divisione di un tetraedro $ABCD$ in tetraedri α, β, $\gamma \ldots$, la quale supporremo non si possa ottenere con successive divisioni per piani trasversali.

Fissata ad arbitrio una faccia di uno dei tetraedri parziali, p. es. di α, prolunghiamola fino ad incontrare il contorno di $ABCD$. Otterremo in questo una certa divisione in parti: ma noi sappiamo, con le costruzioni indicate sopra, assegnare una suddivisione, *per piani trasversali*, in un certo numero di tetraedri T_1. Scelta un' altra faccia di α, prolunghiamola fino ad incontrare il contorno di quel tetraedro T_1, o di ciascuno di quei tetraedri T_1, in cui esso è contenuto. Questo o questi tetraedri T_1 resteranno divisi in parti: ma noi potremo suddividere queste parti con piani trasversali. Così continuando per ciascuna faccia di α e di ogni altro tetraedro parziale $\beta, \gamma, \ldots$ arriveremo a ottenere, *dopo un numero* evidentemente *finito* di costruzioni, una suddivisione *per piani trasversali* della divisione primitiva. In questo modo il tetraedro α della divisione primitiva resterà diviso *per piani trasversali* in un certo numero di tetraedri α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_{n_1}$,

il tetraedro β in un certo numero di tetraedri $\beta_1\ \beta_2, \ldots \beta_{n_2}$, eccetera.

Dimostrato così il *Lemma II*, osserviamo che, pel *Lemma I*, il numero associato ad *ABCD* è eguale alla somma dei numeri associati ai tetraedri

$$\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots \alpha_{n_1},\ \beta_1, \ldots \beta_{n_2}, \ldots$$

Ma la somma dei numeri associati ad $\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots \alpha_{n_1}$ è eguale al numero associato ad α: la somma dei numeri associati a $\beta_1,\ \beta_2, \ldots \beta_{n_2}$ è eguale al numero associato a β, ecc. Dunque sussiste il

Teorema fondamentale. *Se un tetraedro è in qualsivoglia modo diviso in parti tetraedriche, il numero associato al tetraedro primitivo è eguale alla somma dei numeri associati ai tetraedri parziali.*

Se P è un poliedro e si divide in qualsivoglia modo in parti tetraedriche si dimostra facilmente (cfr. § 4) che la somma, sempre maggiore di zero, dei numeri associati ai tetraedri parziali non dipende dalla particolare divisione in parti considerata. Scelto codesto numero come *numero associato* al poliedro P, si vede immediatamente che diviso P in parti poliedriche $P_1, P_2, P_3, \ldots P_k$, il numero associato a P è eguale alla somma di numeri associati a $P_1,\ P_2,\ P_3, \ldots P_k$.

È così stabilita fra poliedri e numeri (positivi, escluso lo zero) una corrispondenza, che, trasformando la somma nella somma, permette di affermare che *i poliedri* sono *grandezze.*

Nella Stereometria elementare, accanto ai prismi e ai poliedri, entrano in considerazione i *cilindri*, i *coni* e la *sfera.*

Per essi e per le superficie rispettive valgono osservazioni analoghe a quelle da noi esposte (§ 6) pel *cerchio* e la *circonferenza.* Noi qui ci restringeremo ad osservare come si dimostri che i *solidi a contorno qualsivoglia*

formano un insieme di *grandezze*, ricorrendo ai teoremi fondamentali del Calcolo integrale. Si vegga, a questo proposito, la dimostrazione del KILLING [1] perfettamente analoga a quella relativa al piano cui abbiamo accennato nel § 7.

§ 10. **Relazioni tra la teoria dell' equivalenza e il postulato di Archimede.** — Le ricerche e le proposte, di cui abbiamo tenuto parola sin qui, non alterano, nelle sue linee generali, la teoria euclidea dell' equivalenza.

Ora invece daremo un breve cenno di una proposta, che mirerebbe a dare alla teoria un assetto logico diverso da quello, che esso ha negli *Elementi* di EUCLIDE.

Il GIUDICE [2] parte dalla seguente definizione, proposta prima dal FRATTINI [3]: « *Si dice che una figura è finita, se non è possibile toglierne una prima parte, indi una seconda, che sia congruente alla prima, poi una terza, anch' essa congruente alla prima, e così via indefinitamente: se invece sia possibile, si dirà che la figura è infinita* ».

In base a codesta definizione, dimostra senza difficoltà il teorema (proposizione del DE ZOLT per le figure chiamate *finite*): « *Una figura finita non può superare sè stessa.* » Allora per potere svolgere l' ordinaria teoria dell' equivalenza dei poligoni e dei poliedri, basta *dimostrare* o *postulare* che tutte codeste figure sono finite.

Alla definizione di figure *finite* ed *infinite* del FRATTINI furono mosse, da varie parti, obiezioni, le quali, in sostanza, si riducono alla constatazione che essa presuppone, che per ciascun insieme di figure, al

---

(1) « *Einführung....* » pag. 33 e seguenti.

(2) *Boll. di Mathesis*, 1896-97; n.° 1.

(3) *Intorno al postulato dell' equivalenza*, 1895; pag. 153.

quale vogliasi applicare, sia prima definito il concetto di parte [1].

Quanto poi alla proposizione che i poligoni e i poliedri sono figure finite, il GIUDICE afferma che essa si dimostra, qualora si ammetta come *postulato* che « *è finita ogni sfera* » e dà un cenno del modo, in cui egli pensa possibile condurre la dimostrazione. Ora a noi sembra, che, quand' anche si voglia astrarre dalle sottigliezze e dalle difficoltà che si incontrerebbero in una rigorosa formulazione di codesto processo dimostrativo, la proposizione: « *Ogni sfera è finita* », non abbia, rispetto alla proposizione del DE ZOLT, caratteri di maggiore evidenza.

Il CIAMBERLINI [2] osservò che si dimostra che sono finiti tutti i poligoni e tutti i poliedri, quando si ammetta che *son finiti un particolare triangolo e un particolare tetraedro.* L' osservazione è certamente ingegnosa: ma è altresì certo che chi si accinge ai primi studi di Geometria concede con eguale facilità che è finito *un triangolo (un tetraedro)* particolare o *il triangolo (il tetraedro)* in generale.

Noi infine osserveremo, che, ammesso per i segmenti il *postulato* di ARCHIMEDE (supposto, cioè, che i segmenti formino un insieme di grandezze *finite*), quelle stesse considerazioni che dimostrano la proposizione del DE ZOLT per i poligoni e per i poliedri, dimostrano che i poligoni e i poliedri, rispettivamente, sono *grandezze finite,* in quanto la corrispondenza che si stabilisce tra poligoni o poliedri e segmenti (o numeri) permette di *trasportare* a quelli l' intera teoria dell' *eguaglianza (equi-*

---

(1) Cfr. LAZZERI, « *Sul postulato dell' equivalenza* » Per. di Mat. 1897; pag. 35. — CIAMBERLINI, l. c. — CERTO, *Boll. di Mathesis*, 1897-98; n.° 1.

(2) *Boll. di Mathesis*; 1896-97, n.° 3.

valenza) dei segmenti, in particolare il *principio* di Archimede.

Giova per altro notare, che ammettendo il *postulato* di Archimede si introduce una restrizione non necessaria.

Lo Hilbert, infatti, ha osservato che la teoria delle aree piane si può fondare indipendentemente dal *postulato* di Archimede [1].

Egli, perciò, distingue due specie di *equivalenza*, chiamando *flächengleich* due poligoni, decomponibili in un numero finito di triangoli, a due a due congruenti; *inhaltsgleich* due poligoni differenze di poligoni *flächengleich*. Noi designeremo codeste due relazioni coi nomi di *equivalenza per somma* ed *equivalenza per differenza* rispettivamente. L' una e l' altra son tali, che poligoni equivalenti ad un terzo sono equivalenti fra loro.

Le note dimostrazioni del I Libro di Euclide permettono di stabilire, indipendentemente dal postulato di Archimede, che due triangoli di eguali basi e di eguali altezze sono *equivalenti per differenza*. Ma la *equivalenza per somma* di siffatti triangoli non si può stabilire se non ricorrendo ad una dimostrazione, come quella del Duhamel (§ 2), che presuppone il *postulato* di Archimede.

La necessità di fare uso di tale principio viene messa in luce dallo Hilbert, notando che ove da esso si prescinda possono aversi triangoli, di egual base ed altezza, e quindi tra loro *equivalenti per differenza*, i quali invece non siano *equivalenti per somma*.

Tuttavia, istituendo un conveniente calcolo sui segmenti (indipendentemente dal postulato d' Archimede), si può definire l' area piana d' un triangolo come prodotto della base per la metà dell' altezza, questo prodotto (pel teorema di Pascal), riuscendo indipendente dalla

---

[1] *Grundlagen der Geometrie* - Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Dankmals; Göttingen, 1899.

base scelta. Di qui si deduce, con sviluppi analoghi a quelli del § 3, che i poligoni possono riguardarsi come *grandezze,* sebbene, ove non sussista il *postulato* d'Archimede, esse non formino più una classe continua (cfr. art. 4). In particolare, allora, poligoni equivalenti non si possono sempre considerare come limiti di poligoni equivalenti.

Osservazione. — La dimostrazione dello Hilbert che i poligoni sono grandezze, va ravvicinata a quella proposta dal Rausenberger (§ 3).

§ 11. **Osservazioni didattiche.** — Ora che abbiamo compiuto l' esame delle principali ricerche, relative alla teoria dell' equivalenza, ci siano permesse due parole sul modo che crediamo migliore per l' insegnamento nella scuola secondaria di codesta teoria.

Quanto alla *proposizione* del De Zolt noi stimiamo conveniente il *postularla* sia per i poligoni, sia per i poliedri. Ed a questa preferenza non ci induce la preoccupazione delle difficoltà, che potrebbe presentare ai giovani ciascuna delle indicate dimostrazioni: poichè, a chi ben guardi, i relativi sviluppi non sono nè più elevati, nè più laboriosi di altre teorie, che, senza discussione, sono ammesse nella scuola. Noi piuttosto temiamo che, costringendo gli alunni alla fatica del dimostrare una proposizione di così spontanea evidenza, si possa in essi suscitare il facile sospetto che la Geometria ricerchi paradossi e questioni di parole.

I giovani ritengono senz' altro la proposizione del De Zolt dimostrata, partendo *a priori* dalla concezione delle superficie come grandezze. Che tale concezione si basi sopra un postulato sperimentale, è un fatto che soltanto qualche spirito critico saprà avvertire.

A chi muove i primi passi nel campo della Geometria, basti dunque affermare il principio del De Zolt

come il resultato di un' esperienza, la quale, per essere concorde con un ragionamento presunto primitivo, non è per questo empiricamente meno chiara.

Quanto poi alla teoria dell' equivalenza dei poliedri (piramidi), a noi pare assai saggia la proposta del dott. Ettore Da Rin, il quale muove dalla definizione: *Due poliedri si dicono equivalenti, se dei due nessuno è maggiore dell' altro.*

Noi non possiamo, nè vogliamo dar qui gli sviluppi inediti, che il Da Rin ci ha voluto con somma cortesia comunicare sull' argomento. Ci basterà l' osservare che, in sostanza, si tratta di un ritorno all' indirizzo di Euclide [1].

Aggiunte. — *A pag.* 118, *riga* 28, dopo « triangolo » aggiungi: « e sopra un lato di esso ». — *A pag.* 119, *riga* 13, *dopo* « all' interno » *aggiungi*: « Sul lato opposto ad A ». — *A pag.* 119, *riga* 17, *dopo* « vertice A » *aggiungi*: « Di più, o una delle traversali per A contiene un lato del Δ_1 e allora su questo lato non cadono certamente vertici di triangoli Δ_3: oppure una traversale per A divide il Δ_1 in due triangoli, per ciascuno dei quali il segmento di traversale contenuto in Δ_1 è un lato, su cui non cadono vertici di Δ_3 ». — *A pag.* 113, *riga* 20, *al posto di* « Δ_1 » *leggi* « Δ_3 ».

---

[1] A noi non sembra neppure in tutto giustificata la preferenza che, nella teoria dell' equivalenza tra piramidi, i moderni scrittori di trattati hanno dato alla considerazione degli *scaloidi*, piuttosto che alla costruzione di Euclide, per cui ogni piramide a base triangolare può essere divisa in due piramidi a base triangolare (eguali e simili tra loro e simili all' intera), e in due prismi eguali, che sono insieme maggiori della metà di tutta la piramide (Libro XII - Prop. III).

ARTICOLO SESTO

« **Sulla teoria delle parallele e sulle Geometrie non euclidee** » di Roberto Bonola a Bologna.

Fra i dati intuitivi che Euclide (300 a. av. C.) pose a base de' suoi *Elementi* havvi il notissimo *V postulato:*

Se una linea retta, cadendo sopra due altre, fa gli angoli interni da una medesima parte la cui somma sia minore di due retti, quelle due prolungate da questa parte s'incontrano [1],

che in forma poco dissimile, specialmente nella forma:

Per un punto passa una ad una sola parallela ad una retta data,

comparisce in tutti i trattati elementari che da Euclide vengono ai giorni nostri.

Da esso seguono immediatamente:

a) *le prime proposizioni sulle parallele;*

b) *il teorema relativo alla somma degli angoli di un triangolo;*

c) *l' esistenza di figure simili.*

---

[1] Per un errore dei primi traduttori del testo greco in parecchie delle successive versioni il detto postulato figura fra gli assiomi, onde va anche conosciuto sotto il nome di *XI Assioma.* Così avviene nella traduzione italiana di Betti e Brioschi, dalla quale ne abbiamo tolto l'enunciato.

Ma il carattere poco intuitivo del detto postulato (*postulato d'* Euclide) indusse nella mente fino dei più antichi geometri il desiderio di dedurlo come una *conseguenza logica delle proposizioni più semplici, relative alla retta, al piano e alla congruenza;* onde la storia dovè registrare una non interrotta serie di tentativi, aventi per iscopo la sua dimostrazione.

Il presente articolo si propone appunto di esporre i più noti ed interessanti fra i detti tentativi, e le moderne vedute, che da essi ebbero origine.

L' articolo è diviso in quattro parti:

La prima, *d'indole storico-critica,* ha per iscopo di mostrare per quali stadii successivi è passato il *problema della dimostrazione del postulato d'* Euclide, e di indicare come e per opera di chi sorsero le così dette *Geometrie Non-Euclidee*, ponenti in luce la *indimostrabilità* di esso.

Nelle altre tre parti, *d'indole costruttiva*, vengono esposti elementarmente e limitandosi al piano:

1.° i principii della teoria generale delle parallele indipendente dal postulato d' Euclide;

2.° le proposizioni fondamentali della Geometria non euclidea iperbolica;

3.° le proposizioni fondamentali della Geometria non euclidea ellittica.

I

§ 1. **I primi tentativi per la dimostrazione del postulato d' Euclide.** — Il primo tentativo, degno di nota, è quello di Procolo (410-485), inserito nel suo *Commento al primo libro d'* Euclide, dove è fatto anche un cenno di analoghi tentativi, dovuti ad altri geometri a lui precedenti.

E benchè la dimostrazione che Procolo dà del V postulato fosse da alcuno degli antichi favorevolmente accolta, dalla maggioranza non fu ritenuta come rigorosa, perchè basata sull'ipotesi di rette equidistanti, che pareva (ed è infatti) equivalente all'ipotesi euclidea.

Un altro ingegnosissimo tentativo è dovuto al geometra persiano Nasir Eddin (1201-1274), autore d'una versione in lingua araba e d'un commento assai reputato degli elementi d'Euclide; ma anche questo, che si basa su alcune proprietà dei triangoli, non ebbe miglior fortuna.

I successivi traduttori e commentatori d'Euclide riportarono, in generale, il postulato senza alcuna osservazione critica: solo qualche anno dopo la pubblicazione del testo greco dei commenti di Procolo e della traduzione latina fattane dal Barozzi (1560), si fece maggiormente sentire il bisogno di costruire su più solide basi la teoria delle parallele.

Ebbe così principio una lunga serie di dimostrazioni, schiarimenti, note illustrative al V postulato, nelle quali, in ultima analisi, l'*ipotesi euclidea venne sostituita da qualche altra, che l'autore giudicò più evidente.*

Di quasi tutte le notevoli pubblicazioni sull'argomento, che da Procolo vengono fino al secolo nostro, parla l'Hoffmann abbastanza distesamente nella sua *Kritik der Parallelen Theorie,* stampata a Jena nel 1807; ed il prof. Riccardi, nell'*Appendice* al suo pregevolissimo *Saggio di una bibliografia euclidea* [1], dove sono annoverate ben mille e quattrocento edizioni degli elementi di Euclide, registra un gran numero di scritti relativi alla teoria delle parallele, aggiungendo qualche brevissima nota dichiarativa.

---

[1] Bologna, *Memorie* (5), I, 1890.

Non potendo qui prendere in esame un sì ricco campo d'indagini, ci restringeremo ad un cenno brevissimo di alcune opere di capitale importanza, raccolte e accompagnate da note storiche e critiche nell'interessante volume *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss,* pubblicato a Lipsia nel 1895, per cura di F. Engel e P. Sakel. Queste opere, che occupano il così detto *periodo preparatorio* alle ricerche moderne sui fondamenti della geometria, contengono il germe di moltissime idee, che nel seguito, e per merito di sommi maestri, ebbero poi il loro completo sviluppo.

§ 2. **L'opera del Wallis.** — La prima delle suddette opere comprende due conferenze del geometra inglese John Wallis (1616-1703), nell'una delle quali, tenuta ad Oxford nel 1651, l'autore espone i suoi tentativi circa la dimostrazione del V postulato e nell'altra, pure letta ad Oxford, nel giugno del 1663, le proprie vedute sulla teoria delle parallele. La nuova idea, di cui siamo debitori al Wallis, consiste nell'*ammettere in luogo del V postulato l'esistenza d'un triangolo simile ad un triangolo dato e di grandezza arbitraria,* idea ch'egli cerca giustificare per analogia col caso del cerchio (cfr. Euclide, III postulato) [1].

Il metodo tenuto dal Wallis per risolvere la questione può forse a prima vista parere soddisfacente, inquantochè la nostra intuizione sembra attestarci l'esistenza di figure d'ugual forma e non ugualmente estese, ma in fondo il concetto di forma indipendente dalla grandezza, oltre essere in tutto equivalente a quello dichiarato nella V ipotesi d'Euclide, è tanto complesso da non adattarsi convenientemente alla veste di postulato.

---

[1] Il terzo postulato d'Euclide enuncia infatti: Da qualsivoglia centro e con qualsivoglia intervallo si può descrivere un cerchio.

L' equivalenza fra il postulato di Wallis e quello d' Euclide ci mostra fin d' ora che se è possibile un sistema geometrico che prescinda dall' ipotesi euclidea, non potranno in tale sistema sussistere figure simili e che la grandezza d' ogni figura sarà intimamente legata a quella dei suoi angoli.

§ 3. **L' opera del padre Saccheri.** — Al lavoro del Wallis segue in linea storica quello del gesuita padre Gerolamo Saccheri (1667-1733), pubblicato in Milano nel 1733 sotto il titolo: « *Euclides ab omnis naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia. Auctore Hieronymo Saccherio Societatis Iesu in Ticinensi Universitate Matheseos Professore* ».

Esso ha per iscopo di rendere gli elementi d' Euclide scevri da ogni obiezione e più particolarmente da quelle che per ben mille e cinquecento anni si ripetevano a proposito del celebre V postulato.

La grande portata dell' opera di Saccheri sta nel genialissimo metodo ivi adottato per sormontare l' ostacolo, che fin dal principio offre la teoria delle parallele.

A differenza degli altri ricercatori, i quali più o meno palesemente commettono l' errore fondamentale di sostituire all' ipotesi euclidea qualche altra ipotesi di maggiore o minore evidenza, il padre Saccheri tenta raggiungere lo scopo cercando contraddizioni nel cuore dei sistemi geometrici, che seguono dalla negazione del postulato in discorso.

A tale scopo egli considera *un quadrilatero piano ABCD, in cui due lati opposti AD, BC sono uguali e perpendicolari ad un terzo AB.* Se si prende come base l' ipotesi euclidea, gli angoli in C ed in D, che indipendentemente da essa si dimostrano uguali, risultano retti; se invece si prescinde da questa ipotesi, oltre il

caso nominato ne esistono altri due a seconda che i detti due angoli si suppongano acuti od ottusi. Ad ognuna delle tre possibilità, che l' autore distingue rispettivamente coi nomi di *ipotesi dell' angolo retto, ipotesi dell' angolo acuto, ipotesi dell' angolo ottuso,* corrisponde un particolar gruppo di teoremi: il postulato d' Euclide avrà una piena e soddisfacente dimostrazione quando si provi che le conseguenze che discendono dall' ipotesi dell' angolo acuto e da quella dell' angolo ottuso contengono in sè stesse risultati contradditori.

Questo è il concetto che informa l' opera di Saccheri, e fra i più interessanti teoremi ch' ei stabilisce pel suo scopo citiamo i seguenti di massima importanza:

a) *Se in un solo caso è verificata l' ipotesi dell' angolo retto o dell' angolo acuto o dell' angolo ottuso, essa è verificata in ogni altro caso.* (Prop. V., VI., VII.).

b) *A seconda che si trova verificata l' ipotesi dell' angolo retto, dell' acuto, dell' angolo ottuso, la somma dei tre angoli di un triangolo rettangolo è rispettivamente uguale, minore, maggiore di due angoli retti.* (Prop. IX.).

c) *Dall' esistenza d' un solo triangolo in cui la somma degli angoli sia uguale, minore, maggiore di due angoli retti si deduce che è soddisfatta rispettivamente l' ipotesi dell' angolo retto, acuto, ottuso.* (Prop. XV.).

Questi teoremi comprendono poi l' altro: *Se in un triangolo la somma degli angoli è uguale, minore, maggiore di due angoli retti, è uguale, minore, maggiore di due retti la somma degli angoli in ogni triangolo,*
che limitatamente al caso *uguale, minore* fu ritrovato indipendentemente e reso noto dal Legendre, circa un secolo dopo [1].

Alle proposizioni sopra ricordate fanno seguito altre relative all' ipotesi dell' angolo acuto, giacchè fino dalla

---

[1] Cfr. § 6, proposizioni *d*), *e*).

XIV proposizione l' ipotesi dell' angolo ottuso viene dimostrata assurda, in base all' *ipotesi dell' infinità della retta.*

Fra esse rammentiamone alcune, che nel seguito saranno nuovamente stabilite dal Lobatschefskij e Bólyai, per uno scopo interamente opposto a quelle cui le dedicava il loro primo scopritore.

d) *Due rette in un piano o ammettono una perpendicolare comune o sono incidenti, ovvero prolungate in un determinato senso vanno vieppiù accostandosi.* (Prop. XXIII).

e) *Se due rette in un piano s' avvicinano sempre più, in un determinato senso, la loro distanza tende allo zero.* (Prop. XXV).

f) *In un fascio di rette uscenti da un punto esistono sempre due rette determinate, che separano le rette incidenti ad una retta fissata da quelle che con quest' ultima ammettono una perpendicolare comune.* (Prop. XXX, XXXI, XXXII).

A queste fa seguito la XXXIII Proposizione, dedicata alla confutazione dell' ipotesi dell' angolo acuto, ed un' altra confutazione più diretta della stessa ipotesi, data nella 2.ª parte del I libro, frutta il concetto di *linee di ugual distanza da una retta data.*

Tanto l' una quanto l' altra confutazione dell' ipotesi dell' angolo acuto sono erronee ed in esse più non si riconosce l' esperto ed abile geometra, che con tanta eleganza seppe fondare il mirabile edificio delle precedenti deduzioni.

I signori Stäckel ed Engel, nel già citato libro, vogliono trovare i germi dell' opera di Saccheri negli studi di alcuni geometri del decimosesto e decimosettimo secolo, segnatamente in quelli di Clavius (1574), di Borelli (1658) e di Giordano da Bitonto (1680).

Il quadrilatero fondamentale del padre gesuita comparisce infatti in Clavius ed in Giordano da Bitonto: lo stesso quadrilatero è destinato a provare l' esistenza di

rette equidistanti. Il concetto poi di perpendicolare comune a due rette non incidenti e la sua insufficienza per fondare la teoria delle parallele si trova in Borelli, il quale si vide costretto ad ammettere l' equidistanza fra rette parallele, come l' enunciava il Clavius, onde dimostrare il postulato d' Euclide.

Aggiungeremo infine che l' opera del padre Saccheri, pressochè sconosciuta durante un secolo e mezzo, venne additata ai matematici dal prof. E. Beltrami nella nota « *Un precursore italiano di* Legendre *e* Lobatschefskij », inserita nei Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, l' anno 1889.

§ 4. **L' opera di Lambert.** — La terza pubblicazione di cui brevemente dobbiamo occuparci è la *Theorie der Parallellinien* di Johann Henrich Lambert (1728-1777), che rappresenta la sintesi di quel movimento critico iniziato in Germania dal gesuita Christoph Sclüssel (Clavius) e proseguito solo due secoli dopo, principalmente per opera di Gotthelf Kaestner (1719-1800) e di G. S. Kügel. L' ultimo dei quali, nel 1763, pubblicava a Göttingen la sua dissertazione inaugurale, presieduta da Kaestner: « *Conatum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio* » dove, con intendimento critico, vengono prese in esame circa trenta dimostrazioni del postulato euclideo. È di sommo interesse la conclusione cui giunge il Kügel, giacchè in essa, e forse per la prima volta, viene manifestato *il dubbio circa la dimostrabilità del V postulato* e viene notato il fatto che *la certezza della verità dell' ipotesi euclidea in noi non è frutto di un seguito di rigorose deduzioni ma piuttosto di osservazioni sperimentali.*

La dissertazione di Kügel ha poi un altro grandissimo merito: quello di aver richiamato l' attenzione di Lambert sulla teoria delle parallele, contribuendo così in qualche modo all' opera di quest' ultimo, della quale ora vogliamo occuparci.

La *Theorie der Parallellinien* di Lambert, scritta nel 1766 e pubblicata nel 1786 dopo la sua morte per cura di Giovanni Bernouilli e C. F. Hindenburg, rivide la luce solo nel 1893, per opera di Stackel, che insieme ad Engel ne curò la ristampa.

Essa è divisa in tre parti.

La prima, di natura critico-filosofica, presenta anche oggi un grande interesse, giacchè il Lambert ebbe sempre larghissime idee nel campo filosofico, del quale egli fu un grande cultore. In essa è fatto cenno della duplice questione che possiamo proporci relativamente al V postulato, cioè se possa dimostrarsi a mezzo dei precedenti, ovvero introducendo altri postulati di pari evidenza.

La seconda parte è dedicata all' esposizione di vari tentativi, nei quali il postulato euclideo è ricondotto a proposizioni semplicissime e di grande carattere intuitivo.

La terza parte, di maggiore interesse, è dedicata alla discussione dei tre casi che verrebbero in questione lasciando cadere l' ipotesi d' Euclide.

Questa terza parte ha molti punti di contatto con l' opera di Saccheri, della quale l' autore solo conobbe quel poco che Kügel riporta nella sua dissertazione.

Parte dunque il Lambert da *un quadrilatero piano con tre angoli retti*, ed a seconda che il quarto angolo è *retto, acuto, ottuso*, abbiamo ciò che egli denomina rispettivamente *prima*, *seconda, terza* ipotesi. Queste tre ipotesi corrispondono poi a quelle che il Saccheri chiama ipotesi dell' angolo retto, dell' angolo acuto, dell' angolo ottuso; anzi si passa dalla figura di quest' ultimo a quella di Lambert, conducendo la mediana nel quadrilatero di Saccheri, e considerando uno qualunque dei quadrilateri così ottenuti.

Come l' *Euclides ab omni naevo vindicatus* ecc. la *Theorie der Parallellinien* considera separatamente le tre

ipotesi suddette e se quest' ultima dà la proposizione *a*) del precedente § solo nel caso dell' angolo retto, va poi molto più lungi nella deduzione di altre e non meno interessanti proprietà, che seguono dalla 2.° e dalla 3.ª ipotesi.

La più notevole è certamente quella che si riferisce alla misura delle aree piane, che enuncia:

L' area d' un triangolo piano, nella 2.ª e 3.ª ipotesi, è proporzionale alla differenza della somma dei suoi tre angoli da due retti.

L' espressione numerica dell' area di un triangolo nella 3.ª ipotesi sarà per conseguenza data dalla formula:

$$\Delta = k(\pi - A - B - C); \tag{1}$$

e nella 2.ª dà:

$$\Delta = k(A + B + C - \pi), \tag{2}$$

dove k è un fattore costante positivo.

È pure di grandissimo interesse il riavvicinamento della geometria sferica alla geometria piana rispondente alla 2.ª ipotesi e l' osservazione della *indipendenza della geometria sferica da ogni questione sulle parallele.*

Più originale ed acuta è poi l' osservazione relativa alla 3.ª ipotesi, che l' autore esprimeva dicendo: *la geometria che sussiste nel piano in forza della 3.ª ipotesi sembra rispondere alla geometria sviluppata sopra una sfera di raggio immaginario.*

Certamente il Lambert dovette essere confortato in quest' idea dal fatto che se nella formula (2), che per $k = r^2$ rappresenta l' area d' un triangolo sferico, si muta il raggio r nel raggio immaginario ir e si pone ancora $r^2 = k$ si passa alla formula (1).

Questa profetica osservazione di Lambert, ch' ebbe una conferma più di mezzo secolo dopo (cfr § 12) è da mettersi accanto all' altra, per la quale, dopo aver egli

dimostrato l' *irrazionalità* di π, ne affermava la *trascendenza*, stabilita dal Lindemann solo nel 1882.

Che il Lambert, dopo il 1766, siasi ancora occupato del nostro argomento non possiamo dire con certezza: l' aver però egli studiato le funzioni trigonometriche ad archi immaginari (che verrebbero in considerazione nella 3.ª ipotesi), vincendo così un preconcetto del tempo relativo al simbolo $i = \sqrt{-1}$, c' induce a credere che egli abbia visto ancora più oltre nella questione sollevata dal postulato euclideo.

§ 5. **L' opera di Legendre.** — La critica della teoria delle parallele, che già in Italia ed in Germania aveva condotto a risultati di sì alto interesse, verso la fine del XVIII secolo ebbe anche in Francia un notevole impulso. Basti ricordare che Fourier (1768-1830), a perfezionamento della detta teoria proponeva nuove definizioni per la retta e pel piano; che il Lagrange (1736-1813) ravvisava l' indipendenza della trigonometria sferica dal V postulato; che il Carnot (1753-1823) ed il Laplace (1749-1827) appoggiavano, come già il Wallis, l' idea di sostituire all' ipotesi d' Euclide quella che afferma l' esistenza di figure simili; che infine Adriano Maria Legendre (1752-1833) offriva, con l' opera sua, la più brillante sintesi del movimento critico iniziato da geometri di tanto valore.

Per quanto i principali risultati a cui giunge quest' ultimo siano già contenuti negli studi di Saccheri e di Lambert, l' importanza che presenta l' opera di Legendre non viene certo menomata, tanto più che la rapida diffusione che essa raggiunse fin dal suo sorgere contribuì a mantener vivo l' interesse dei geometri sopra una questione ormai tanto antica.

I tentativi di Legendre per la dimostrazione dell' ipotesi euclidea, pubblicati nelle varie edizioni degli

Elementi d' Euclide, che vanno sotto il suo nome, offrono il notevole pregio di guidare semplicemente al risultato proposto e di porre bene in evidenza su quale nuova ipotesi l' autore fonda il suo ragionamento. Così una dimostrazione del V postulato (II ed. *Elementi*) è basata sull' esistenza d' un cerchio per tre punti non in linea retta (postulato, in seguito proposto dal Bólyai); un' altra (XII ed. *Elementi*) sulla non esistenza d' una unità assoluta per le misure, ecc., ecc.

Queste dimostrazioni, raccolte dall' autore nel 1833, vennero pubblicate nei *Mémoires de l'Académie R. des Sciences de l' Institut de France* (tomo XII) sotto il titolo: *Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles.*

Da questa memoria togliamo alcuni risultati di sommo interesse, perchè indipendenti da qualsiasi ipotesi sulle parallele, e ne diamo una breve esposizione, seguendo la via tenuta da Legendre, con qualche leggera modificazione di forma.

§ 6. **Esposizione dei teoremi di Legendre.** — a) *La somma dei tre angoli d' un triangolo non può eccedere due angoli retti.*

Suppongasi, se è possibile, che $2R + \alpha$ sia la somma dei tre angoli del triangolo ABC, che in A ha l'angolo minore (Fig. 1 - Tav. I). Diviso allora per metà, nel punto H, il lato BC, si congiunga A con H e si prolunghi il segmento AH d' un ugual segmento HD. Dall' uguaglianza dei due triangoli AHC, BHD, si deducono le uguaglianze angolari $\widehat{CAH} = \widehat{HDB}$, $\widehat{CAH} = \widehat{HBD}$, onde che nel triangolo ABD la somma degli angoli vale ancora $2R + \alpha$ e che uno dei due angoli $\widehat{DAB}$, $\widehat{ADB}$, che insieme compogono $\widehat{CAB}$, sarà minore od uguale alla metà di quest' ultimo.

Applicando al triangolo ADB le stesse costruzioni e ragionamenti fatti sul triangolo primitivo potremo dedurre un nuovo triangolo, in cui la somma degli angoli vale ancora $2R + \alpha$ ed in cui un angolo è minore od uguale a $\frac{\widehat{CAB}}{4}$; e così procedendo, dopo n operazioni. ad un triangolo in cui la somma degli angoli sempre vale $2R + \alpha$ ed in cui uno di questi è minore od uguale a $\frac{\widehat{CAB}}{2^n}$. Ma per n abbastanza grande essendo $\alpha > \frac{\widehat{CAB}}{2^n}$, otterremmo un triangolo in cui due angoli presi insieme sorpasserebbero due retti, il che manifestamente è assurdo. Dunque dovrà necessariamente essere $\alpha \leq O$.

Si noti che nella stabilita proposizione si fa implicitamente uso della proprietà che ha la *retta* di essere *infinita*, giacchè si suppone di poter prendere un segmento HD, doppio d' un segmento arbitrario AH. Se si volesse prescindere dalla infinità della retta, cadrebbe il teorema di Legendre. A persuaderci di ciò valga la geometria sferica, nella quale il piano viene sostituito dalla superficie della sfera, la retta dal cerchio massimo. L' operazione di raddoppiare un segmento non è possibile se il segmento è più grande d' una semicirconferenza, e la somma dei tre angoli d' un triangolo è maggiore di due retti.

Dal teorema sopra dimostrato si deduce poi immediatamente:

In un poligono convesso di n lati la somma degli angoli interni è minore od uguale a $(2n - 4)$ *angoli retti.*

Si giunge al resultato operando una decomposizione del poligono in tanti triangoli, a mezzo di rette uscenti da un punto situato nel suo interno.

Introducendo poi per brevità la parola *deficenza* a denotare di quanto differisce da $(2n - 4)$ retti la somma

S_n degli angoli d' un poligono convesso, ponendo cioè

$$\alpha = (2n - 4)\, R - S_n,$$

avremo che:

In un poligono convesso è la deficenza

$$\alpha \geq o\,.$$

Segue inoltre che

La deficenza d' un triangolo composto di due altri è uguale alla somma delle deficenze di questi altri.

Infatti se $2R - \alpha$ è la somma degli angoli d' un triangolo componente e $2R - \beta$ quella dell' altro, la somma degli angoli del triangolo totale resulta:

$$(2R - \alpha) + (2R - \beta) - 2R = 2R - (\alpha + \beta).$$

b) *Se la somma dei tre angoli d' un triangolo vale due retti, valgono pure due retti le somme degli angoli dei triangoli che da esso si ottengono a mezzo di suddivisioni con rette uscenti da un vertice.*

Poichè se nel triangolo ACD, che la retta CD stacca dal triangolo ABC, la somma valesse $2R - \alpha$ dovrebbe nell' altro triangolo rimanente DBC la somma dei tre angoli valere $2R + \alpha$, il che, per il teorema *a)*, è assurdo.

c) *Se in un triangolo la somma dei tre angoli vale due retti può sempre costruirsi un quadrilatero con quattro angoli retti e quattro lati uguali, la cui grandezza superi ogni segmento assegnato.*

Sia ABC un triangolo a deficenza nulla. Un tale triangolo lo supporremo rettangolo ed isoscele, giacchè se così non fosse potremmo sempre ridurci a questo caso a mezzo di suddivisioni con rette uscenti dai vertici (teorema *b*). Accostando per l' ipotenusa due siffatti triangoli comporremo un quadrilatero $ABDC$ con quattro angoli retti e quattro lati eguali. Dalla riunione conveniente di quattro simili figure risulta un nuovo quadri-

latero $AEFG$, che gode delle stesse proprietà di $ABCD$ ed i cui lati sono doppi di quelli di quest' ultimo.

Così procedendo, dopo n operazioni, saremo condotti ad una figura con quattro angoli retti e quattro lati uguali fra loro ed uguali ciascuno a 2^n volte il lato AB. Sicchè se n è abbastanza grande il lato del quadrilatero a cui si perviene sorpassa in grandezza qualunque segmento grande a piacere.

Osservazione. La diagonale divide poi un siffatto quadrilatero in due triangoli rettangoli isosceli di deficenza nulla, onde dall' esistenza d' un solo triangolo in cui la somma dei tre angoli vale due retti segue l' esistenza d' un triangolo rettangolo isoscele, i cui lati sorpassano un segmento assegnato e in cui la somma degli angoli vale pure due retti.

d) *Se la somma dei tre angoli d' un triangolo vale due retti, vale pure due retti la somma degli angoli d' ogni altro triangolo.*

Basterà dimostrare il teorema pel triangolo rettangolo, giacchè ogni triangolo può sempre decomporsi in due, che abbiano entrambi un angolo retto.

Sia dunque ABC un triangolo rettangolo qualunque (Fig. 2 - Tav. I). Se in un solo triangolo la somma dei tre angoli vale due retti, pel teorema precedente potremo costruire un triangolo rettangolo isoscele $A_1B_1C_1$ che goda della stessa proprietà ed i cui cateti superino quelli di ABC. Si sovrappongano allora gli angoli retti dei due triangoli, come indica la Fig. 2 e si applichi prima al triangolo $A_1B_1C_1$ poi al triangolo AB_1C_1 il teorema *b)*. Dedurremo allora che nel triangolo AB_1C_1 e quindi anche nel triangolo ACB la somma dei triangoli vale due retti.

e) *Se in un solo triangolo la somma dei tre angoli vale meno di due retti, in ogni altro triangolo vale pure meno di due retti.*

Segue dal teorema precedente.

I due ultimi teoremi, come si vide al § 3, sono compresi nelle proposizioni di Saccheri, le quali, oltre i due casi trattati da Legendre, trattano anche il caso in cui la somma degli angoli d' un triangolo supera due retti.

Questo terzo caso non può comparire nelle ricerche di Legendre, in forza del suo primo teorema da noi riportato; teorema che ha fondamento nell' ipotesi della *infinità della retta.*

Lasciando cadere questa ipotesi, come già a suo luogo dicemmo, vien meno il teorema in discorso, ed allora l' ipotesi dell' angolo ottuso di Saccheri ha ragione di sussistere, accanto alle altre due esaminate dal Legendre.

Vediamo ora quali conclusioni possono trarsi, relativamente al postulato d' Euclide, dai teoremi sopra sviluppati.

f) *Se la somma dei tre angoli d' un triangolo vale due retti, per un punto qualunque del piano passa una sola parallela ad una retta assegnata.*

Alla dimostrazione di questo teorema premettiamo il seguente

Lemma. *È sempre possibile, per un dato punto P, condurre una retta che, con una retta data r, formi un angolo minore di un angolo assegnato.*

Infatti (Fig. 3 - Tav. I) detto Q il piede della perpendicolare calata da P sopra r, su uno dei due raggi in cui Q divide la r si prenda un segmento $QR = PQ$ e si denoti con ω l' angolo $PRQ = RPQ$. Si costruisca poi il triangolo PRR_1 in cui l' angolo in R sia supplemento di ω ed in cui il lato RR_1 sia uguale ad RP: gli angoli adiacenti a PR_1 sono eguali, e non superano $\frac{\omega}{2}$. Procedendo nello stesso modo, dopo n operazioni, giungeremo ad un triangolo $PR_{n-1}R_n$, in cui gli angoli in

R_n ed in P saranno minori od uguali ad $\frac{\omega}{2^n}$, giungeremo cioè ad una retta PR_n, che partendo da P incontra la r sotto un angolo piccolo quanto si vuole.

Ritornando ora alla proposizione enunciata e mantenendo la figura da cui siamo partiti per la dimostrazione del lemma, si tracci la perpendicolare s da P alla PQ. Ogni retta, che uscendo da P incontri la r in R, formerà con le due r ed s angoli corrispondenti uguali, perchè nel triangolo PQR la somma dei tre angoli è per ipotesi uguale a due angoli retti. E siccome, pel lemma stabilito, è sempre possibile condurre per P delle rette che con la r formino un angolo piccolo a piacere, segue che tutte le rette per P, tranne la s, dovranno incontrare la r; onde s è l' unica parallela che per P possa condursi alla r.

§ 7. **Postulati equivalenti al postulato d' Euclide.** — Dalle ricerche di Legendre apparisce chiaramente l' equivalenza fra il postulato di Euclide ed il postulato:

a) *La somma dei tre angoli d' un triangolo uguaglia due retti.*

Altri postulati equivalenti a quello d' Euclide sono:

b) *Esistono rette equidistanti* (Procolo).

c) *Esistono figure simili* (Wallis, Carnot, Laplace).

d) *Per un punto, preso nell' interno di un angolo, passa sempre una retta incidente ai due lati dell' angolo* (Lagendre).

e) *Per tre punti, non in linea retta, passa sempre un cerchio* (Legendre, Bólyai).

f) *L' area d' un triangolo può superare qualunque area assegnata grande piacere* (Gauss).

Non ci tratterremo a dimostrare come dai postulati enumerati possa dedursi quello d' Euclide.

§ 8. **L' opera del Gauss.** — In seguito agli inutili sforzi, che per duemila anni si fecero, per dimostrare il V postulato, e segnatamente in seguito alle pubblicazioni che dal 1830 al 1870 videro la luce, nella maggior parte dei geometri, fiorenti sui primi del secolo nostro, s' affermava l' idea che l' assetto rigoroso e definitivo della teoria delle parallele costituisse un problema da mettersi con l' altro della quadratura del cerchio o con quello del moto perpetuo.

Un tale rassegnamento di fronte al postulato in discorso, già lo trovammo in Kaestner e Kügel; anzi a proposito di quest' ultimo, nel § dedicato al Lambert, esplicitamente dicemmo quale opinione avesse egli espresso.

Non di meno in mezzo allo scetticismo invadente, che rendeva sterili i germi tanto fecondi contenuti nelle opere di Saccheri e di Lambert, l' interesse per le parallele non era ancor spento. E se da un lato questo interesse condusse ai soliti ed inconcludenti tentativi; dall' altro, liberando la Geometria da ogni restrizione aprioristica, guidava l' umana ragione alla conquista di nuovi sistemi geometrici, i quali, pur avendo il loro primo fondamento nella intuizione, si allargano ad un campo più vasto, coll' astrarre da quei dati meno evidenti dell' intuizione stessa, su cui si basa il postulato d' Euclide.

Tutta la difficoltà di entrare nell' ordine di idee qui accennate, appare manifesta a chi, riportandosi a quei tempi, rifletta alla concezione, allora dominante, della *filosofia kantiana.*

Fu Carl Friedrich Gauss (1777-1855) il primo ad avere la chiara visione d' una *geometria indipendente dal postulato d'* Euclide e una tale visione, che per ben cinquant' anni restò chiusa nella mente del sommo geometra, solo venne alla luce in seguito alle opere di Bólyai e Lobatschefskij, quando il Gauss, sanzionando colla sua

autorità imponente le preziose scoperte dei due oscuri geometri, apriva un nuovo ed inesplorato campo alle discipline geometriche.

Dell' opera di Gauss abbiamo notizia solo da alcune sue lettere scritte a Wolfang Bólyai, a Bessel a H. G. Schumacher, al Gerling, al Taurinus e da due piccole note pubblicate nei *Göttinger gelehrte Anzeigen*, l' una nell' aprile del 1816, l' altra nell' ottobre del 1822.

Altri documenti si aspettano dalla pubblicazione di manoscritti del Gauss tuttora inediti a Göttingen, onde illuminare finalmente l' oscurità che avvolge le sue ricerche e dichiarare la via ch' ei tenne nello svolgimento di quella teoria geometrica, per cui, egli stesso, nel 1846, propose il nome di *non euclidea*.

Le lettere sopra citate altro non dicono se non che egli per ben cinquant' anni si è occupato, per quanto concedeva il poco tempo concessogli dalle sue occupazioni, di natura diversa, indefessamente della questione delle parallele, e ci permettono di delineare a grandi tratti due periodi nella storia delle sue ricerche.

Un primo periodo, che dal 1792 viene circa al nostro secolo, è dedicato certamente allo studio storico della questione ed alla ricerca dei mezzi, che potevano condurre alla dimostrazione del V postulato.

Ad illustrare detto periodo vale una lettera che il Gauss, nel dicembre 1799, dirigeva all' amico Wolfang Bólyai, appassionato cultore dei fondamenti delle matematiche. In questa lettera il Gauss esprime che *la via nella quale è entrato non conduce al fine che si cerca* (cioè la dimostrazione del V postulato), *ma piuttosto a mettere in dubbio l' esattezza della geometria.* Aggiunge ancora che egli è giunto a parecchie conclusioni, le quali, dalla maggior parte degli uomini (secondo l' espressione di Gauss), sarebbero tenute come valevoli dimostrazioni, ma che ai suoi occhi non dimostrano nulla. E come esempio

cita il fatto che *ammessa l' esistenza d' un triangolo rettilineo, la cui area sia maggiore d' un' area data a piacere, è dimostrabile il V postulato.* Ma naturalmente converrebbe innanzi tutto provare l' esistenza di un siffatto triangolo.

Il secondo periodo delle ricerche di Gauss dal principio del secolo vien fin dopo al 1831, anno in cui Johanne Bolyai pubblicava la sua *Geometria assoluta.*

In esso, formata la convinzione dell' indipendenza del V postulato dalle prime proprietà della retta e del piano, procede nello svolgimento delle proposizioni fondamentali della novella geometria, che prescinde dall'ipotesi euclidea e nel 1819, come risulta da un brano d' una sua lettera diretta al Gerling, *è giunto tant' oltre da potere, nel nuovo sistema geometrico, affrontare e risolvere ogni problema.* Queste stesse parole, ripetute al Taurinus in una lettera che porta la data del 1824, ci fanno supporre che il Gauss abbia tradotto in linguaggio differenziale i fondamenti della geometria, e così, oltre precedere Lobatscheftskij e Bólyai nello sviluppo elementare della nuova geometria, egli precederebbe forse anche il Riemann e la sua dissertazione del 1854.

Una risposta, se pure è possibile, a tale supposizione, si aspetta dall' esame dei manoscritti inediti del Gauss, di cui sopra facemmo parola.

§ 9. **L' opera dello Schweikart e del Taurinus.** — Contemporanei al Gauss sono altri due investigatori, sui fondamenti della geometria, che le pazienti ricerche dei signori Engel e Stäckel hanno fatto conoscere ([1]).

Il primo di tali investigatori è Ferdinand Karl Schweikart (1780-1857), che dal 1820 in poi fu profes-

---

([1]) Cfr. *Die Theorie der Parallellinien* ecc., già citata; pag. 237.

sore di diritto a Königsberg. L' unico suo scritto d' indole matematica è: *Die Theorie der Parallellinien nebst dem Vorschlage ihrer Verbannung aus der Geometrie* pubblicato a Jena e Lipsia nel 1808. Esso, contrariamente a quanto il titolo lascia supporre, non contiene una geometria indipendente dal V postulato: rimanendo nel campo degli *Elementi d' Euclide*, propone soltanto una semplice sostituzione del concetto di parallelogrammo a quello di rette parallele.

In seguito però lo Schweikart, entrato in altro ordine di idee, sviluppava (senza dare alla stampa) una teoria geometrica, indipendente dalla ipotesi euclidea; teoria, che, a mezzo dell' amico Gerling, faceva pervenire a Gauss nel 1819 e gli fruttava l' approvazione di quest' ultimo.

Il secondo dei nominati investigatori è Franz Adolph Taurinus (1794-1874), nipote dello Schweikart, che nel 1825 pubblicava la *Theorie der Paralleninien* e nell' anno successivo i *Geometriaæ prima elementa.*

Il Taurinus, benchè persuaso della verità assoluta del V postulato, riconosce tuttavia la *possibilità logica* delle altre due ipotesi, che già figurano nelle ricerche di Saccheri e di Lambert; nonchè il fatto che *una di esse trova sulla sfera un' interpretazione concreta.*

L' unica ragione su cui egli s' appoggia per concludere a favore della geometria d' Euclide scaturisce dall' esistenza d' una costante, già incontrata dal Gauss nella geometria non euclidea, variando la quale si otterrebbe un concetto capace di varie determinazioni, racchiudente come caso particolare lo spazio, il che appariva in contrasto con la concezione filosofica del tempo.

Il nuovo contributo che il Taurinus porta alla nuova geometria con le sue ricerche consiste nell' aver dato le *formule della trigonometria non euclidea.*

Circa l' importanza dello Schweikart e del Taurinus nella storia della geometria non euclidea, ecco, in breve, come si esprimono i signori Stäckel ed Engel, nella loro pregevole opera, più volte citata.

Lo Schweikart, per la chiarissima idea ch' ebbe di una possibile geometria, che dal V postulato prescinda, è da mettersi con Gauss, al quale, per altro, rimane inferiore nello sviluppo della nuova dottrina; il Taurinus, per la fede nell' assoluta verità della sola geometria di Euclide è piuttosto da avvicinarsi al Saccheri ed al Lambert, ai quali però è superiore per lo sviluppo più esteso dei nuovi sistemi, dei quali riconobbe l' esattezza logica.

§ 10. **I tre indirizzi moderni nelle ricerche sui fondamenti della geometria.** — Col Gauss, lo Schweikart e il Taurinus finalmente si chiude quello, che, sul principio (cfr. § 1), chiamammo *periodo preparatorio* alle ricerche sui fondamenti della geometria.

Senza quì indagare le ragioni per cui gli studi di Scheweikart e di Gauss non vennero in luce in questo periodo, gettiamo piuttosto un breve e sintetico sguardo nel campo delle nuove dottrine non euclidee.

Le quali, a seconda dei metodi che i loro cultori seguirono nei successivi sviluppi, possono assegnarsi a *tre indirizzi* diversi.

Il primo, che può denominarsi *elementare*, sorge con Lobatschefskij e Bólyai, i veri fondatori della geometria non euclidea; il secondo, che s' intitola *metrico-differenziale*, s' inizia da un lato con la classica *dissertazione* del Riemann e dall' altro con l' opera di Helmholtz; il terzo, che prende le mosse da un' originale concezione di Cayley e si distingue col nome di *indirizzo proiettivo*, principalmente per merito di Klein porge in fine la più brillante trattazione delle teorie non euclidee.

§ 11. — **L' opera di Lobatschefskij.** — Le prime ricerche che tendono ad una geometria indipendente dal postulato d' Euclide furono pubblicate da Nicolaj H. Lobatschefskij (1793-1856), professore di matematica all' università di Kasan.

Lobatschefskij, dal punto di vista in cui egli si pone, è condotto a separare in due classi le rette d' un fascio, a seconda ch' esse risultano o no incidenti ad una retta fissata nel loro piano; e a definire come *parallele* quelle due rette del fascio, eventualmente coincidenti, che dividono le rette incidenti dalle non incidenti.

L' ipotesi di *due* parallele per un punto ad ogni retta del piano *(ipotesi iperbolica)* caratterizza pienamente un nuovo sistema di Geometria *(Geometria iperbolica)*, e corrisponde all' ipotesi dell' angolo acuto di Saccheri e Lambert. L' ipotesi in cui le nominate parallele, per ogni punto, coincidono *(ipotesi parabolica* o *euclidea)* corrisponde invece all' ordinaria *Geometria euclidea* o *parabolica* e al caso dell' angolo retto dei nominati autori.

Si hanno quindi i teoremi:

Nel piano iperbolico

a) *la somma dei tre angoli di un triangolo è minore di due angoli retti* (Teorema di Saccheri);

b) *l' area d' un triangolo è proporzionale alla sua deficenza* (Teorema di Lambert);

c) *la lunghezza della circonferenza di raggio r ha per espressione:*

$$\pi k \left(e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}}\right) \text{ (Teorema di Gauss);}$$

d) *la relazione trigonometrica fondamentale in un triangolo è data dalla formula:*

$$\operatorname{Cosh}\left(\frac{a}{r}\right) = \operatorname{Cosh}\left(\frac{b}{r}\right) \operatorname{Cosh}\left(\frac{c}{r}\right) - \operatorname{Senh}\left(\frac{b}{r}\right) \operatorname{Senh}\left(\frac{b}{r}\right) \operatorname{Cos} \alpha.$$

(Teorema di Taurjnus).

Insieme a questi risultati, che Lobatschefskij dedusse indipendentemente dai loro primi scopritori, troviamo nel nuovo sistema geometrico la scoperta notevolissima che il limite a cui tende un cerchio, quando il raggio tende all' infinito, non è una retta, ma sibbene una certa linea che l' autore denomina *oriciclo.* Il caso ordinario euclideo si otterrebbe supponendo che l' oriciclo degenerasse in una retta.

Non è però da credere che il nostro autore rapidamente entrasse in quell' ordine di idee che doveva guidarlo alla fondazione del suo sistema.

Fin dal 1815 egli si occupava del V postulato, tentando, in vari modi, di dimostrarlo; per cui un lungo lavoro mentale precedè l' « *Exposition succinte des principes de la Géométrie, avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles* », presentata nel 1826 all' università di Kasan e stampata in sunto nel bollettino della stessa università, solo nell' anno 1829.

Uno svolgimento più ampio delle proprie idee pubblicava Lobatschefskij fra il 1835 ed il 1838, negli scritti dell' università di Kasan, e nel '40 apparivano a Berlino le sue « *Geometrische Untersuschungen* ». Finalmente nel 1855, in lingua russa e francese ad un tempo, uscì la *Pangeometria*, che riassume tutte le precedenti ricerche sulla teoria delle parallele.

Questi ed altri minori scritti del Lobatschefskij sono ora raccolti nelle sue *Opere complete*, edite per cura dell' università di Kasan, gli anni 1883-86.

§ 12. **L' opera di Bólyai.** — Contemporaneo al Lobatschefskij è il geometra ungherese Johann Bólyai, che, per influenza del padre Wolfang, si dedicava allo studio delle parallele, creando così un sistema geometrico simile a quello di cui sopra facemmo parola.

Forse più rapidamente de' suoi predecessori il Bólyai penetrò nello spirito della questione, giacchè nel 1823 poneva i fondamenti di quelle teorie, che due anni dopo comunicava al padre ed al suo antico maestro Johann Walter von Eckwer, e che solo nel '32 uscivano come appendice al « *Tentamen....* » di Wolfang sotto il titolo:

« *Appendix, scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) indipendentem; adijecta, ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica. Auctore Johanne Bólyai de Bólya, Geometrarum in Exercitu Caesareo Regio Austriaco Castrensium Capitaneo* ».

L' opera di Johann, inviata da Wolfang al Gauss nel gennaio del 1832, fruttava da parte di quest' ultimo una lunga lettera; che, oltre mostrarci come il grande matematico trovasse l' *Appendix*... di sua piena soddisfazione, ci illumina un poco sulla via seguìta da lui stesso nelle sue lunghe meditazioni [1].

Anche dei metodi del Bólyai, come di quelli di Lobatschefskij, non terremo parola, rimandando all' esposizione della geometria non euclidea che noi diamo nel seguito: diremo soltanto che il punto di partenza dei due fondatori non differisce, e che il geometra ungherese, con metodi rapidi ed eleganti giunge anch' esso alle formule d' una trigonometria non euclidea, e di più al notevole risultato della *quadratura geometrica del circolo, nel caso della falsità del postulato d' Euclide.*

Aggiungeremo poi che tanto il Lobatschefskij quanto il Bólyai, nella mancanza di contraddizione nel loro sistema e nel fatto che le loro formule trigonometriche costituiscono vere e proprie identità funzionali, videro

---

[1] Cfr. « *Gauss, di beiden Bólyai* ecc... » lettera VI. Math. Ann. XLIX, 1897; ovvero Bull. Sciences. Math. (2), XXI, 1897.

una chiarissima prova della indimostrabilità del postulato euclideo.

Noteremo in fine che il Lobatschefskij, osservando che le stesse formule, col mutamento della costante arbitraria r in ir, si trasformano in quelle dell' ordinaria trigonometria, veniva finalmente ad affermare ciò che il Lambert aveva preveduto, cioè: *il sistema geometrico rispondente all' ipotesi dell' angolo acuto trova una interpretazione nella geometria* (analitica) *sopra una sfera di raggio immaginario.* (Cfr. § 4).

Osservazione. — Nè l' opera di Lobatschefskij, nè quella del Bólyai ebbero, al loro sorgere, quell' accoglienza che tanti secoli di lenta e continua preparazione sembravano promettere.

Ciò non deve maravigliare: ogni radicale rinnovamento in una disciplina scientifica non può abbattere d'un tratto i preconcetti e le idee che il tempo, attraverso la mente di pensatori più o meno elevati, edifica e rinforza.

Se non che, nel nostro caso, a ritardare la vittoria delle nuove idee contribuirono anche alcune ragioni speciali. Vuoi l' oscurità dei loro fondatori, vuoi la difficoltà che le opere in russo del Lobatschefskij offrivano alla lettura, vuoi lo scetticismo dominante da un lato e la concezione Kantiana dello spazio dall' altro, per ben dieci anni la nuova geometria rimase avvolta nelle più profonde tenebre.

A diradare le quali indubbiamente valsero la pubblicazione tedesca del 1840 e quella francese del '55 delle opere di Lobatschefskij; ma il vero trionfo delle nuove vedute data dal giorno in cui si seppe che il Gauss fu persuaso non pure della validità logica del nuovo sistema, ma della possibilità fisica d' uno spazio che ad esso risponda.

Riacquistato ancora una volta l' antico prestigio, la teoria delle parallele attrasse di nuovo l' attenzione

dei geometri, e fra i primi che si interessarono delle nuove ricerche dobbiamo rammentare Riccardo Baltzer, non solo perchè nella 2.ª edizione de' suoi « *Elemente der Mathematik* » fa un cenno dei concetti di Gauss, Lobatschefskij e Bólyai, ma anche perchè sollecita ed ottiene dall' Hoüel una traduzione francese delle loro opere.

E a questa traduzione, che vide la luce nel 1866, fanno seguito, per opera del Battaglini, le traduzioni italiane inserite gli anni 1867-68 nel *Giornale di Matematiche*, le quali riaccesero in Italia quell' interesse per la teoria delle parallele che, più d' un secolo innanzi, fruttava l' opera mirabile del padre Gerolamo Saccheri.

§ 13. **La geometria sopra le superficie in rapporto colle teorie non euclidee.** — Per rendere conto dei progressi ulteriori della geometria, secondo gli indirizzi *metrico differenziale* e *proiettivo*, dovremmo uscire dal campo elementare per esporre le applicazioni di alcune elevate teorie matematiche, quali la *geometria metrica differenziale sopra le varietà*, traente origine da una classica memoria di Bernardo Riemann, la *teoria dei gruppi continui di trasformazioni*, fondata da Sophus Lie, la *geometria proiettiva pura* (sistema di Staudt) e le *metriche relative ad un assoluto* che da essa derivano, secondo la concezione di Cayley, ampiamente svolta dal Klein.

Non essendo consentaneo a l' indole di questo articolo entrare, sia pur sommariamente, in quistioni troppo elevate, ci restringeremo a quelle poche cose necessarie per far comprendere al lettore lo spirito che informa le nuove ricerche, e per condurlo ad un nuovo sistema geometrico, dovuto al Riemann, che le precedenti ricerche di Lobatchefskij e Bólyai, escludevano fin dal principio coll' ammettere l' infinità della retta.

Questo sistema va anche conosciuto sotto il nome del suo fondatore e corrisponde all'ipotesi dell'angolo ottuso di Saccheri e Lambert.

A facilitare lo scopo proposto conviene muovere da un'idea, che è fondamento al *Saggio di una interpretazione della geometria non euclidea* (1), con il quale il professor E. Beltrami largamente contribuiva a rendere note ed apprezzate le vedute della geometria non euclidea.

Consideriamo perciò una superficie, e proponiamoci di vedere fino a che punto si può fondare sopra di essa una geometria analoga a quella che vale sul piano.

Per due punti A, B della superficie passa generalmente una linea ben determinata che le appartiene, la quale segna la minima distanza fra i due punti sulla superficie. Una tal linea è la *geodetica* congiungente i due punti A, B della superficie. Se si tratta p. e. di una sfera la geodetica, che congiunge una coppia di punti A, B (purchè questi non siano estremi di un diametro) è un arco del cerchio massimo ch' essi determinano.

Ora, volendo paragonare la geometria sopra una superficie con la geometria sul piano, appare naturale di mettere a riscontro le geodetiche di quella (misuranti le distanze sopra la superficie), con le rette di questo; ed anche di considerare come *eguali*, sopra una superficie, due figure (tracciate su di essa) che possano farsi corrispondere punto per punto, in modo che le distanze geodetiche fra le coppie di punti corrispondenti siano uguali.

Più chiaramente diremo che, come nel piano sono uguali due figure sovrapponibili con un movimento del piano su sè stesso, sopra una superficie sono uguali due figure *applicabili* con un movimento della superficie su

---

(1) *Giornale di Matematiche*, VI.

sè stessa; movimento nel quale la superficie viene pensata non come rigida (invariabile di forma), ma piuttosto come un foglio flessibile ed *inestendibile.*

Prendiamo, come esempio, un pezzo di superficie cilindrica, che per semplice flessione senza estensione può applicarsi sopra una regione piana. Abbiamo allora una superficie che può muoversi su se stessa (pur mutando di forma nello spazio), e *sopra una tale superficie una geometria paragonabile a quella della porzione piana corrispondente;* anzi si può dire che questa geometria (restando sopra la superficie) non cambia ove la superficie si fletta senza estensione. Perciò essa si identifica con quella piana quando la superficie cilindrica si sviluppi sul piano.

Ma non tutte le superficie possono svilupparsi sul piano (ad esempio ciò non è possibile per la sfera), e neppure tutte le superficie possono muoversi su se stesse considerate come fogli flessibili ed inestensibili; onde la geometria fondata sopra una superficie differirà, in generale, da quella del piano.

Ora perchè sopra una superficie si abbia una geometria paragonabile con quella piana, occorre almeno che ogni sua porzione possa liberamente muoversi sopra la superficie stessa, di guisa che valga, per le figure tracciate su di essa, *il principio di sovrapponibilità, che è il fondamento della teoria della congruenza nel piano.*

I risultati di Gauss e di Minding permettono di affermare che le superficie liberamente mobili sopra se stesse (nel senso suddetto) sono caratterizzate dalla costanza di un certo numero, che per ogni punto della superficie esprime la *curvatura* di Gauss [1].

---

[1] Rammentando che per curvatura d' una linea piana in un punto s' intende l' inversa del raggio del cerchio asculatore in quel puuto (cerchio che ha tre punti infinitamente vicini, comuni con la curva) ecco come può definirsi la curvatura di una superficie, in un suo punto M:

A seconda poi del valore di tale curvatura, si presentano i tre casi distinti:

$$k > o, \quad k = o, \quad k < o.$$

Nel primo caso *la superficie è applicabile sopra una sfera,* cioè un pezzo qualsiasi della superficie, convenientemente limitato, può deformarsi, per via di pura flessione, in guisa da adagiarlo sopra una superficie sferica di raggio $r = \sqrt{k}$; nel secondo caso *la superficie è sviluppabile* (come il cilindro) *sul piano,* ossia una porzione qualunque della superficie, convenientemente limitata, può deformarsi, per via di sola flessione, in guisa da adagiarla sopra un piano; nel terzo caso *la superficie, o meglio una sua regione limitata, può applicarsi sopra una pseudosfera,* per via di semplice flessione.

La superficie pseudosferica, di cui diamo il modello (Fig. 4 - Tav. I), si può generare con la rotazione di una curva speciale detta *trattrice,* intorno all' asintoto.

La trattrice si può definire geometricamente come quella curva in cui il segmento di tangente compreso fra il punto di contatto e l' asintoto è uguale alla costante

$$r = \sqrt{-k} \quad (k < o).$$

Condotta per M la normale n alla superficie si consideri il fascio di piani per n e il relativo fascio di curve ch' esso sega sulla superficie. Fra le curve (piane) di tale fascio ne esistono due ortogonali fra loro, le cui curvature (sopra definite) godono delle proprietà di *massimo* o *minimo. Il prodotto di tali curvature dà la curvatura della superficie nel punto M* (Gauss). Alla curvatura di Gauss compete poi uno spiccatissimo carattere: *essa si mantiene invariata per una flessione senza estensione della superficie;* talchè se due superficie sono applicabili, nel senso indicato nel testo, debbono, nei punti corrispondenti, avere la stessa curvatura (Gauss). Questo risultato invertito dal Minding, nel caso delle superficie a curvatura costante, rende manifesto che le superficie liberamente mobili sopra se stesse sono caratterizzate dalla costanza nella curvatura. Cfr. Bianchi. *Lezioni di Geometria differenziale*, cap. VII.

Volendo poi studiare nei tre casi suddetti la geometria sopra una superficie basta riportarsi ad uno dei modelli indicati, perchè la geometria stessa non muta ove si fletta senza estendere la superficie.

Questa identità fra la geometria delle superficie a curvatura costante e la geometria sopra la sfera, il piano e la pseudosfera, si verifica soltanto quando ci si restringa a regioni convenientemente limitate. Basta infatti l'esempio del cilindro a convincerci: poichè dove sul piano completo tutte le rette hanno lunghezza infinita, sul cilindro vi sono particolari geodetiche (i circoli sezioni normali) chiuse e finite; dove sul piano due rette hanno al più un punto comune, sul cilindro due geodetiche (eliche) hanno, in generale, infiniti punti in comune.

Paragonando ora la geometria d'una porzione di pseudosfera con la geometria di una regione di piano si vede che in essa valgono ugualmente le prime proposizioni fondamentali, fatta eccezione per quelle che si collegano al valore della somma degli angoli d'un triangolo. Infatti *d'un triangolo* (geodetico) *sulla pseudosfera la somma degli angoli è sempre minore di due angoli retti.*

Segue che la geometria sulla pseudosfera viene ad equivalere a quella che si avrebbe sul piano (in ogni regione limitata), nelle ipotesi di Lobatschefskij e Bólyai, e perciò fornisce di questa un'interpretazione concreta.

Una tale interpretazione forma appunto l'oggetto del *Saggio* di Beltrami, dal quale abbiamo preso le mosse.

Aggiungeremo ancora che il Minding stesso, nelle sue pubblicazioni sulle superficie a curvatura costante, diede le formule della trigonometria pseudosferica (identiche a quelle di Lobatschefskij e Bólyai), ma che non mise in relazione i suoi risultati con quelli, poco conosciuti allora, della geometria non euclidea.

Consideriamo ora la geometria sferica.

Anch' essa, come del resto è ben noto, per un primo gruppo di proposizioni si presenta analoga alla geometria del piano; differisce da questa in primo luogo per il valore della somma degli angoli d' un triangolo, in secondo luogo perchè il postulato della retta patisce eccezione: due punti opposti della stera appartengono ad infiniti cerchi massimi (geodetiche).

Questo secondo fatto riguarda però la superficie completa, non una regione limitata; tanto che si può dire che sopra una superficie sferica limitata valgono le stesse proposizioni della geometria piana, fatta astrazione da quella fondamentale, relativa alla somma degli angoli d' un triangolo.

Ora, nel piano ordinario, da che cosa è contradetta l' ipotesi, che la somma dei tre angoli d' un triangolo sia maggiore di due retti, come avviene sulla sfera?...

Essa viene contraddetta dall' altra ipotesi che attribuisce alla retta una *lunghezza infinita*, ipotesi dalla quale Riemann prescinde nella sua dissertazione: *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (1854) [1], avvertendo ch' essa non esprime il risultato di alcuna esperienza, causa la necessaria limitazione dei nostri mezzi di osservazione, bensì esprime piuttosto una estensione che il nostro stesso intelletto dà ai resultati delle esperienze effettuate nella regione spaziale a noi accessibile.

Secondo Riemann il postulato dell' infinità della retta non è dunque meno discutibile di quello delle parallele: ciò che invece egli non ritiene discutibile è la proprietà della retta (e quindi del piano e dello spazio) di essere *illimitata*. Le due proprietà della retta di essere illimitata e finita si conciliano supponendo che la retta sia una *linea chiusa*.

---

[1] *Gôtt. Abhandl.* XIII, 1868; oppure *Annali di Matematica.* (2) III.

Facendo tale ipotesi sorgerebbe una nuova geometria piana nella quale varrebbero per regioni limitate i teoremi della geometria sferica.

§ 14. **Fondamenti d'una geometria piana secondo le idee di Riemann.** — Raccogliendo le idee finora esposte, possiamo abbozzare un procedimento assai semplice, onde prende origine la concezione d'una geometria più generale di quella d'Euclide.

a) *Ammettiamo di partire da una regione limitata di piano, non dell'intero piano;*

b) *concediamo come postulati quelle proposizioni elementari, rivelateci dai sensi, nella regione inizialmente presa; proposizioni relative alla determinabilità della retta, alla congruenza ecc.;*

d) *ammettiamo che le proprietà della regione iniziale si possano estendere ad ogni intorno di un punto qualunque del piano* (non diciamo al piano completo abbracciato con un solo sguardo).

La geometria sviluppata in base e questi principii sarà *la più generale geometria piana, conciliabile colle nostre esperienze* (relative a regioni limitate).

In base a quanto si disse nel § 13 è chiaro che la detta geometria troverà una concreta interpretazione in quella delle superficie a curvatura costante. Tutte le superficie di una stessa curvatura, per ogni regione limitata, daranno una stessa geometria. Si noti che nelle formule (in relazione all'unità di misura) comparirà uno costante k, che corrisponde poi alla curvatura della superficie.

Se invece di superficie limitate si considerano *superficie intere*, come p. es. piano e cilindro, non è più lecito concludere sulla completa equivalenza dei sistemi geometrici ad esse relativi; inquantochè possono nascere delle eccezioni dipendenti dalla speciale forma della

superficie completa. Così p. es., come già notammo a suo luogo, alcune proposizioni fondamentali relative alle rette (geodetiche), considerate nella loro interezza, più non valgono nella Geometria sopra il cilindro (completo). Onde la geometria dell' intero cilindro non è pienamente paragonabile a quella dell' intero piano.

Per conservare alla nostra geometria piana generale una maggiore rispondenza con l' intuizione, è naturale domandarsi se è possibile estendere a tutto il *piano completo*, in ciascuno dei tre casi nominati, il postulato di determinazione della retta e le proprietà di congruenza e di movimento.

La risposta è affermativa; e tre sono i sistemi geometrici che così si originano:

1.° *Il sistema euclideo o parabolico, rispondente al valore zero della curvatura e caratterizzato dall' unicità della parallela.*

2.° *Il sistema di* Lobatschefskij e Bólyai, *od iperbolico, rispondente al valore negativo della curvatura e caratterizzato dalle due parallele.*

3°. *Il sistema di* Riemann *o ellittico, rispondente al valore positivo della curvatura e caratterizzato dalla mancanza di rette parallele.*

Per questi due ultimi sistemi geometrici si presenta naturale di considerare l' interpretazione nella geometria sulla pseudosfera o sulla sfera innanzi accennata. Ma *tale interpretazione non vale per le Geometrie non euclidee del piano completo.* Così sopra la pseudosfera si trovano delle particolari geodetiche (rette) di lunghezza finita.

In quanto alla Geometria sferica, essa differisce dalla Geometria del piano rispondente alla nostra 3.ª ipotesi, per l' *esistenza di punti opposti che non determinano una geodetica,* cioè un circolo massimo, ma sono comuni a infiniti circoli massimi.

Questa osservazione è dovuta al Klein, il quale rivendicò l' esistenza di una geometria ellittica del piano, nella quale vale senza eccezione il postulato di determinazione della retta. Per lo innanzi si era caduti in errore su questo punto, ritenendo che l' interpretazione della geometria riemanniana sopra la sfera, valesse non per regioni limitate soltanto (come accade di fatto), ma in tutta la sua interezza.

Si ottiene invece una semplice interpretazione della geometria piana ellittica considerando la *geometria nella stella.*

S' intende per *stella* l' insieme delle rette e dei piani passanti per un punto. La geometria della stella è costituita dall' insieme delle relazioni, fra angoli, diedri ecc. a cui danno luogo le figure della stella: angoli poliedri ecc. Orbene, questa geometria si traduce nella geometria ellittica del piano completo, sostituendo alle parole *retta, piano, angolo diedro*, rispettivamente le parole *punto, retta, angolo.* In ciò appunto consiste l' interpretazione sopra indicata.

§ 15. **Fondamenti d' una geometria spaziale, secondo Riemann.** — Rivolgendoci ora allo spazio, si parta dal fondamento filosofico che i postulati esprimono delle verità d' indole sperimentale, verificabili solo in una regione limitata, e si ammetta che in base ai detti postulati i punti dello spazio siano rappresentati da tre coordinate x_1, x_2, x_3.

In tale rappresentazione (analitica) ogni linea verrà a corrispondere a tre equazioni parametriche:

$$x_1 = f_1(t), \quad x_2 = f_2(t), \quad x_3 = f_3(t);$$

ed allora potremo proporci di determinare una funzione s, del parametro t, che esprima la *lunghezza d' un arco di curva.*

Stante la proprietà *distributiva*, per la quale la lunghezza d' un arco è uguale alla somma delle lunghezze delle parti in cui può immaginarsi diviso, una tale funzione sarà pienamente determinata quando si conosca la distanza elementare ds di due punti infinitamente vícini, di coordinate:

$$x_1, x_2, x_3; \; x_1 + dx_1, \; x_2 + dx_2, \; x_3 + dx_3.$$

In base ad ipotesi assai generali il Riemann trova a priori, che il quadrato dell' elemento lineare ds deve avere l' espressione:

$$ds^2 = \Sigma \, a_{ij} \, dx_i \, dx_j,$$

nella quale le a_{ij} sono funzioni di x_1, x_2, x_3.

Ammettendo ora il *principio della sovrapponibilità* delle figure, si dimostra che le funzioni a_{ij} debbono essere di tale natura da permettere, in seguito ad un opportuno mutamento del sistema di coordinate, che il ds^2 assuma la forma:

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{1 + \frac{k}{4}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)},$$

nella quale la costante k è ciò che il Riemann, per estensione del concetto gaussiano, denomina convenzionalmente *curvatura dello spazio.*

A seconda poi che k è maggiore, uguale, minore di zero abbiamo lo spazio a curvatura costante positiva, lo spazio a curvatura nulla, lo spazio a curvatura costante negativa.

Facciamo un passo ulteriore ammettendo di *estendere allo spazio completo* il principio di sovrapponibilità (movimenti), e il postulato per cui la retta è determinata, senza eccezione, da due punti: si trovano allora *tre*

forme spaziali, cioè *tre geometrie logicamente possibili* e conciliabili coi dati sperimentali, da cui siamo partiti.

La prima di tali geometrie *(geometria ellittica)* rispondente alla curvatura positiva, è caratterizzata dal fatto che in ogni piano vale il sistema di Riemann, per la qual cosa lo spazio a curvatura positiva sarà *illimitato* e *finito* in tutte le direzioni; la seconda, rispondente alla curvatura nulla, è l' ordinaria geometria d' Euclide *(geometria parabolica)*; la terza infine, che risponde al valore negativo della curvatura *(geometria iperbolica)*, dà luogo in ogni piano al sistema di Lobatschefskij e Bólyai.

§ 16. **L' opera di Helmholtz e le ricerche del Lie.** — Hermann Helmholtz, nella sua pubblicazione *Ueber die Thatsachen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (1), invece di partire dalla distanza elementare, considerata dal Riemann, parte dalle *proprietà fondamentali del movimento dei corpi rigidi* e giunge anch' egli a stabilire i tre sistemi geometrici, di cui più sopra abbiamo fatto parola.

Helmholtz risolve il suo problema per via analitica, ammettendo (come il Riemann) che i punti dello spazio possano rappresentarsi a mezzo di tre coordinate indipendenti, ed usa implicitamente delle proprietà dei *gruppi continui,* la cui teoria, fondata dal Lie, fu da questi applicata alla risoluzione del *problema di Riemann-Helmholtz.* Il quale venne così ricondotto a caratterizzare l' insieme dei movimenti dello spazio come un *gruppo di trasformazioni* (sistema di trasformazioni componibili ed invertibili) dotato di certe proprietà fondamentali.

Postulate convenientemente tali proprietà, in relazione al concetto di *libera mobilità* degli elementi lineari

---

(1) Lie: *Theorie der Transformationsgruppen*, Vol. 3. — Leipzig; Teubner, 1893.

e superficiali uscenti da un punto, si trovano *tre tipi di gruppi* possibili, i quali caratterizzano le tre geometrie *ellittica, iperbolica, parabolica.*

§ 17. **Subordinazione della Geometria euclidea alla proiettiva.** — Finalmente anche la *geometria proiettiva* sta in un' elegante relazione coi tre sistemi geometrici di Lobàtsckefskij, di Riemann e di Euclide.

Per dare un' idea anche di quest' ultimo modo di trattare il problema, rammentiamo che la geometria proiettiva, secondo il sistema di G. C. Staudt (1798-1867), riposa esclusivamente sopra le *nozioni grafiche*, relative ai punti, alla retta, ai piani, e bandisce sistematicamente ogni concetto *di congruenza e di movimento* (quindi di *misura* ecc.). Per la qual cosa la geometria proiettiva, prescindendo da un certo gruppo di postulati, comprenderà un numero più ristretto di proprietà generali. Le quali (per quanto concerne le figure piane) sono le proprietà *(proiettive)* che restano invariate per proiezioni e sezioni.

Non di meno, fondata nello spazio la geometria proiettiva, possono *introdursi nell' organismo di essa i concetti metrici, come relazioni con certi enti (metrici) particolari.*

Restringendoci al caso del piano (euclideo) vediamo di quale interpretazione grafica siano suscettibili *i concetti metrici fondamentali di parallelismo e di ortogonalità.*

Giova, a tale scopo, considerare in modo speciale *la retta all' infinito* del piano e *l' involuzione assoluta* che su di essa determinano le coppie di raggi ortogonali di un fascio. I punti doppî di tale involuzione, immaginarî coniugati, vengono denominati *punti ciclici*, per la loro proprietà di appartenere a tutti i cerchi del piano.

Ciò posto, il *parallelismo* di due rette si esprime graficamente con *la proprietà che esse hanno di concorrere in un punto della retta all' infinito; l' ortogonalità* di due rette si esprime graficamente con *la proprietà dei loro punti all' infinito, di essere coniugati nella involuzione assoluta* (separare armonicamente i punti ciclici).

Anche la nozione d' angolo, in seguito alle ricerche del Laguerre, può esprimersi in modo analogo, giacchè:

l' angolo di due rette, a meno d' un fattore di proporzionalità, è dato dal logaritmo del birapporto del gruppo che i punti all' infinito delle due rette formano coi punti ciclici.

Ciò posto, si può vedere come la relazione di congruenza tra due figure piane qualunque possa esprimersi come una relazione grafica di esse colla retta all' infinito e l' involuzione assoluta [1]. E poichè la congruenza è il fondamento di tutte le proprietà metriche, segue che la retta all' infinito e l' involuzione assoluta permettono di subordinare alla geometria proiettiva tutte le proprietà della geometria metrica. *Le proprietà metriche compariscono nella geometria proiettiva non come proprietà grafiche delle figure considerate in sè stesse, ma come proprietà grafiche in relazione agli enti metrici fondamentali costituiti dalla retta all' infinito e dalla involuzione assoluta.*

L' insieme degli enti metrici fondamentali si denota brevemente, con Cayley, *assoluto del piano.*

Quanto abbiamo detto per il piano si estende naturalmente allo spazio. Nello spazio gli enti metrici fondamentali, che permettono di subordinare le proprietà metriche alle grafiche, sono *il piano all' infinito ed una certa polarità (polarità assoluta)* su questo piano, segata

---

[1] Cfr. p. e. Enriques: *Lezioni di Geometria Proiettiva* § 50; osservazione 2.ª

dalla polarità nella stella che ad ogni retta fa corrispondere il piano ortogonale. La conica fondamentale della detta polarità è il *cerchio* all'infinito, comune a tutte le sfere.

§ 18. **Subordinazione delle Geometrie non euclidee alla Geometria proiettiva.** — Sorgono ora spontanee le due domande:

Nelle ipotesi non euclidee è possibile la fondazione della geometria proiettiva?

Data la possibilità di tale fondazione, le proprietà metriche potranno, come nel caso parabolico, venire subordinate alle proiettive?

La risposta è affermativa.

Se nello spazio è valido il sistema ellittico (o di Riemann), la fondazione della geometria proiettiva non offre alcuna difficoltà, pel fatto che si trovano senz'altro verificate le proprietà grafiche, che stanno a base dell'ordinario sistema proiettivo, dopo l'introduzione degli elementi improprî.

Se nello spazio è valido il sistema iperbolico (o di Lobatschefskij), si può ancora fondare la geometria proiettiva introducendo, con opportune convenzioni, dei nuovi *punti, rette* e *piani impropri* (o *ideali*), in base allo stesso concetto che presiede la fondazione della geometria proiettiva, nel caso ordinario (di Euclide).

Se non che i punti improprî, determinati dalle rette coplanari non incidenti, non possono, in questo caso, come nell'ordinario euclideo, riguardarsi come appartenenti ad un piano (piano all'infinito): essi costituiscono un'intera regione spaziale, separata dalla regione dei punti proprî a mezzo di una *quadrica* (*quadrica limite*). In un piano i punti improprî sarebbero separati dalla regione dei punti proprî a mezzo della *conica* (*conica limite*), che la precedente quadrica determina sul

piano stesso (conica luogo dei punti improprî comuni alle rette parallele).

Viene così stabilita (e per l' opera di Klein) la validità della geometria proiettiva nelle due ipotesi non euclidee. I risultati dati da Cayley, nella pubblicazione fondamentale *Sixth Memoir upon Quantics*, (1) permettono poi di asserire che *le proprietà della metrica ellittica ed iperbolica possono,* come quella della metrica parabolica, *subordinarsi alla geometria proiettiva.*

Se non che gli enti metrici fondamentali, che per lo spazio parabolico sono costituiti dal piano all' infinito e dalla polarità assoluta, per gli spazî non euclidei sono diversi.

Per subordinare la geometria iperbolica alla proiettiva, l'*ente metrico fondamentale è la quadrica limite*, che separa, come abbiamo detto, la regione dei punti proprî (interna ad essa) dalla regione dei punti improprî. Per subordinare la geometria ellittica alla proiettiva *l' ente metrico fondamentale è una quadrica immaginaria, ad equazione reale, definita da una polarità uniforme dello spazio.*

Tanto nell' uno, quanto nell' altro caso le *proprietà metriche* delle figure sono tutte *le proprietà grafiche, che rimangono inalterate nelle trasformazioni dello spazio che fanno corrispondere ai punti di un qualunque piano i punti di un piano (trasformazioni proiettive) e che lasciano fisso l' ente metrico fondamentale, detto assoluto.*

Queste trasformazioni proiettive costituiscono poi gli ∞^6 *movimenti* dello spazio non euclideo.

Nel caso euclideo le nominate trasformazioni (che non alterano l' assoluto) sono le ∞^7 similitudini dello spazio, fra cui, in particolare, si trovano gli ∞^6 movimenti.

(1) *Philosophical Transactions* CXCLIX, 1859.

Si noti che pel piano la subordinazione della metrica alla proiettiva è in relazione alla conica (*assoluto del piano*), in cui il piano stesso interseca la quadrica limite (assoluto dello spazio). Questa conica è *reale* nel caso iperbolico, *immaginaria* (ad equazione reale) nell'ellittico, e le proprietà metriche delle figure, sono le proprietà grafiche del piano in relazione al suo assoluto, cioè *le proprietà grafiche che rimangono inalterate in tutte le trasformazioni proiettive* (trasformazioni che cambiano rette in rette) *che lasciano fisso l' assoluto del piano.*

Come si esprimono, rispetto all' assoluto, i concetti di distanza e di angolo?

Introdotto nello spazio proiettivo un sistema qualunque di coordinate omogenee (x_1, x_2, x_3, x_4), che permetta di rappresentare la retta con equazioni lineari [1], l' equazione della quadrica assoluto sarà del tipo:

$$\Omega_{xx} = \Sigma a_{ij} x_i x_j = 0 .$$

Allora la distanza di due punti, $X(x_i)$, $Y(y_i)$ viene espressa (a meno d' una costante) dal *logaritmo del birapporto del gruppo ch' essi formano coi punti M, N in cui la loro congiungente incontra l' assoluto.*

Ponendo poi:

$$\Omega_{xy} = \Sigma a_{ij}\, x_i\, y_i ,$$

e rammentando, dalla geometria analitica, che il birapporto dei quattro punti X, Y, M N è espsesso da:

$$\frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega^2_{xy} - \Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega_{xy} - \Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}},$$

l' espressione D_{xy} della distanza sarà dunque:

$$D_{xy} = C \log \frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega^2_{xy} - \Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega^2_{xy} - \Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}};$$

---

[1] Cfr. FIEDLER: *Trattato di Geometria descrittiva.* Trad. it., Sagno e Padova. — Firenze, Le Monnier, 1874, (pagg. 499 e seg.).

ovvero, introducendo le funzioni *arc. sen.* od *arc. cos.*:

$$D_{xy} = 2iC \text{ arc. cos. } \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}}\,;$$

$$D_{xy} = 2iC \text{ arc. sen. } \frac{\sqrt{\Omega^2_{xy} - \Omega_{xy}\,\Omega_{yy}}}{\sqrt{\Omega_{xx}\,\Omega_{yy}}}.$$

La costante C che comparisce nelle formule è poi legata alla curvatura k, introdotta dal Riemann, dalla relazione:

$$k = -\frac{1}{4C^2}\ (^1).$$

Per l' interpretazione proiettiva del concetto di angolo di due piani, valgono considerazioni analoghe:

L' angolo di due piani U, V è rappresentato (*a meno di un fattore costante*) *dal logaritmo del birapporto del gruppo che i due piani dati formano coi piani* (immaginari) *tangenti all' assoluto, condotti per la loro retta comune.*

Per esprimere analiticamente questo angolo, conviene partire dall' equazione della quadrica in coordinate di piani. Se con b_{ij} si denotano i reciproci degli elementi a_{ij} nel discriminante di Ω_{xx}, l' equazione dell' assoluto, in coordinate di piani diventa:

$$\Psi_{uu} = \Sigma\ b_{ij}\ u_i\ u_j = o$$

Allora l' angolo di due piani, $U\ (u_i)$, $V\ (v_i)$, verrà espresso dalla formula:

$$\omega_{uv} = C' \log \frac{\Psi_{uu} + \sqrt{\Psi^2_{uv} - \Psi_{uu}\,\Psi_{vv}}}{\Phi_{uv} - \sqrt{\Psi^2_{uv} - \Psi_{uu}\,\Psi_{uv}}}\,;$$

ovvero:

$$\omega_{uv} = 2\mathrm{i}\ C' \text{ arc. cos } \frac{\Psi_{uv}}{\sqrt{\Psi_{uu}\,\Psi_{vv}}}$$

$$\omega_{uv} = 2\mathrm{i}\ C' \text{ arc. sen. } \frac{\sqrt{\Psi^2_{uv} - \Psi_{uu}\,\Psi_{vv}}}{\sqrt{\Psi_{uu}\,\Psi_{vv}}}.$$

---

(1) Cfr. Klein: *Ueber die sogennante Nicht-Euklidische Geometrie*; *Math.* Ann. IV, 1871.

Una espressione analoga vale per la distanza di due punti e l' angolo di due rette nella geometria del piano: basta supporre che, nelle formule precedenti,

$$\Omega_{xx} = O \; ; \; \Psi_{uu} = O \, ,$$

rappresentino le equazioni (puntuale e tangenziale) dell' assoluto del piano, anzichè dell' assoluto dello spazio. A seconda che: $\Omega_{xx} = O$ è l' equazione di una quadrica reale a punti ellittici, ovvero di una quadrica immaginaria, le formule date sopra si riferiscono alla geometria iperbolica od alla geometria ellittica.

Notiamo poi che il caso parabolico può riattaccarsi a quello iperbolico considerandolo come un caso limite, corrispondente ad una *degenerazione* della quadrica assoluto (considerata come inviluppo). Allora la formula della distanza perde ogni significato in quanto che i punti M, N, in cui la congiungente di X e Y incontra l' assoluto, coincidono. Si può tuttavia, mediante un conveniente *passaggio al limite* ed un' opportuna *scelta della costante* moltiplicatrice, interpretare la formula in modo che essa valga a rappresentare la distanza ancora nel caso parabolico.

Non occorre poi fare una simile considerazione per l' angolo di due rette o di due piani, in quanto che le formule generali mantengono il loro significato anche nel caso parabolico: anzi si potrebbe facilmente vedere come a mezzo d' una semplice trasformazione di coordinate si riducono senz' altro a quelle che il Laguerre stabiliva pel caso euclideo.

§ 19. **Rappresentazione delle geometrie non-euclidee sul piano ordinario.** — Alla interpretazione proiettiva della metrica, di cui sopra abbiamo discorso, si collega un' interessante rappresentazione che può darsi delle geometrie non-euclidee.

Riferiamoci, per brevità, ad un piano ordinario, e ad una *regione di essa interna ad una conica*, p. es. ad un *cerchio*, e mostriamo come in essa possa rappresentarsi l' intero piano di Lobatschefskij.

Per stabilire la rappresentazione indicata, fisseremo *convenzionalmente* di chiamar *piano* la *regione circolare* suddetta, e quindi di chiamare *rette di questo piano* le *corde del cerchio.* Nella regione così delimitata (piano convenzionale) sono chiaramente soddisfatte le proprietà grafiche ordinarie, relative alla determinazione delle rette, alla loro divisione in parti ed alla divisione che esse operano nel piano ecc.

Si convenga ora di chiamare movimenti le ∞^3 *trasformazioni proiettive che, lasciando inalterato il cerchio fondamentale, trasformano in sè stessa la regione dei punti interni.*

Le dette trasformazioni soddisfano invero a tutte le ordinarie proprietà dei movimenti del piano.

Stabilendo, entro il cerchio, i concetti di congruenza, in relazione alle trasformazioni sopra indicate col nome di movimenti, tutte le prime proprietà, legate a tali concetti, riceveranno qui una convenzionale interpretazione.

Ora osserviamo che i nostri movimenti (convenzionali), applicati ad un punto qualunque della regione dei punti interni al cerchio, permettono al punto di *accostarsi quanto vuolsi* alla circonferenza, ma non di *raggiungerla.* La circonferenza appare dunque come una *linea irraggiungibile* o *linea limite*, cioè *l' ente all' infinito* del nostro piano convenzionale.

Allora (Tav. I - Fig. 5) due corde del cerchio che (come le a, b) si incontrano, offriranno l' immagine di *rette secanti* nella geometria iperbolica; due corde, che hanno un estremo comune (come le a', b'), offriranno la immagine di due *rette parallele;* due corde, che non s' incontrano (come le a, a'), l' immagine di *rette non secanti.*

Si trova così verificato il principio fondamentale della geometria iperbolica, giacchè per un punto qualunque della regione fissata passano due rette parallele ad una retta data (le rette che dal punto vanno agli estremi della corda data).

Vediamo ancora come in questa metrica convenzionale, stabilita nell' interno del cerchio, possa esprimersi la distanza di due punti.

Si introduca perciò un sistema di coordinate ortogonali (x, y) con l' origine nel centro del cerchio. La distanza di due punti $A\ (x, y)$, $B\ (x', y')$, (nel piano convenzionale), non può rappresentarsi con la solita formula

$$\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}\,;$$

giacchè non rimarrebbe inalterata nelle trasformazioni proiettive, che più sopra chiamammo movimenti; sarà invece una funzione delle loro coordinate, che rimane inalterata in tutti i movimenti e che sulla retta gode della proprietà distributiva, espressa dalla formula:

$$\text{dist: } (AB) = \text{dist: } (AC) + \text{dist: } (CB)\,.$$

Ora una espressione delle coordinate (x, y), (x', y'), di A e B, che rimanga invariata nei movimenti (trasformazioni proiettive che lasciano fisso il cerchio limite), è il birapporto dei quattro punti A, B, M, N, dove M, N sono gli estremi della corda AB: la espressione più generale, che gode della richiesta proprietà invariantiva, è una funzione arbitraria di tale birapporto.

Richiedendo poi che la detta funzione riesca distributiva, nel senso sopra indicato, bisogna assumerla, a meno d' un fattore di proporzionalità, uguale al logaritmo di $(ABMN). = \frac{AM}{BM} : \frac{AN}{BN}$. Avremo dunque:

$$\text{dist: } (AB) = C \log. (ABMN)\,.$$

Analogamente dicasi per l' angolo di due rette (corde) incidenti:

$$\text{ang. } (ab) = C' \log. (abmn)$$

$$\left\{ (abmn) = \frac{\text{sen } am}{\text{sen } bm} : \frac{\text{sen } an}{\text{sen } bn} \right\}$$

dove m, n sono le tangenti immaginarie condotte dal punto comune ad a, b al cerchio limite.

Le formule, così ottenute, corrispondono pienamente alle formule della distanza e dell' angolo dianzi incontrate (cfr. § 18), trattando della subordinazione della metrica alla geometria proiettiva.

Si ha in ciò una conferma del fatto che *la metrica convenzionale, fondata nella regione interna ad un cerchio o* (più generalmente) *interna ad una conica, è una esatta interpretazione della geometria piana iperbolica.*

§ 20. **Fondazione della Geometria partendo dai concetti grafici.** — I concetti sopra esposti conducono ad un nuovo ordine di idee nel quale, secondo Klein, si pongono a primo fondamento della geometria le proprietà grafiche, anzi che le proprietà della congruenza e del movimento, come negli indirizzi di Riemann e di Helmohltz [1].

In base alle dette proprietà si sviluppa la geometria proiettiva e si ricava da essa la metrica in relazione ad un assoluto. Il quale, se si tien conto delle proprietà del movimento rivelateci dall' esperienza, non può essere che una quadrica reale a punti ellittici (eventualmente degenere come inviluppo), ovvero una quadrica immaginaria ad equazione reale.

Si ritrovano dunque, anche per questa via, i *tre sistemi geometrici*, cui giungevano il Riemann e l' Helmohltz, l' uno partendo dal concetto di distanza elementare, l' altro dalle proprietà dei movimenti.

---

[1] Cfr. Klein: *Mathematische Annalen.* Bde 6, 7, 17. — Pasch: *Vorlesungen über neuere Geometrie.* — Leipzig, 1882.

§ 21. **Sulla indimostrabilità del postulato d'Euclide.** — Avanti di porre fine a questa esposizione storica, ci sembra utile dire qualche parola sulla indimostrabilità del postulato d'Euclide.

Il fatto stesso che gli innumerevoli tentativi per la sua dimostrazione non condussero al risultato atteso, può far sorgere il dubbio *ch' esso sia indimostrabile*, giacchè l' istinto geometrico sembra attestarci che una proposizione così semplice, se è dimostrabile, debba esserlo per via di considerazioni del pari semplici.

Ma tali considerazioni non possono in verun modo tenersi in conto di una *prova* della indimostrabilità in questione.

Prescindendo dal postulato d' Euclide, per seguire gli sviluppi di Gauss, Lobatschefskij e Bólyai, si costruisce un edifizio geometrico, nel quale non s' incontrano contraddizioni logiche, e che perciò appunto sembra attestare la possibilità logica dell' ipotesi non-euclidea, che è quanto dire l' *indipendenza* del postulato d' Euclide dai primi principii della geometria, e quindi la sua *indimostrabilità*. Tuttavia il fatto « che non si sieno incontrate contraddizioni » non basta ad assicurarci di ciò; occorre accertarci che proseguendo negli indicati sviluppi « mai tali contraddizioni potranno incontrarsi ». Tale convinzione si può fare scaturire in modo sicuro, dalla considerazione delle formule della trigonometria non-euclidea.

Se infatti ci riferiamo al sistema di tutte le terne di numeri (x, y, z), e consideriamo convenzionalmente ogni terna come un *punto analitico*, possiamo definire la *distanza* di due punti analitici partendo dalle formule della suddetta trigonometria non-euclidea. Costruiamo così un sistema analitico, il quale, offrendo una convenzionale interpretazione della geometria non-euclidea, dimostra la possibilità logica di essa.

In questo senso le formule della trigonometria non-euclidea di Lobatschefskij danno la prova dell' indipendenza del postulato d' Euclide dai primi principii della geometria (relativi alla retta, al piano e alla congruenza — cfr. art. 2, 3, 4).

Si può cercare una *prova geometrica* dell' indipendenza stessa, riattaccandosi agli sviluppi ulteriori, di cui abbiamo fatto menzione.

Per ciò conviene partire dal principio che i concetti costruiti dalla nostra intuizione (indipendentemente dalla rispondenza che essi trovano nel mondo esterno) sono a priori *logicamente possibili* [1], e così è logicamente possibile la geometria euclidea ed ogni serie di deduzioni su di essa fondata.

Ora l' interpretazione che la geometria piana non-euclidea e iperbolica riceve nella geometria sopra le superficie a curvatura costante negativa, offre *fino ad un certo punto* una prima prova della indimostrabilità del postulato euclideo. Precisamente resta così stabilito che « il postulato suddetto non può essere dimostrato fondandosi sui primi principii della geometria, validi in una regione limitata del piano ». Infatti ogni contraddizione logica che scaturisse dall' ipotesi opposta si tradurrebbe in una contraddizione nella geometria sopra le superficie a curvatura costante negativa.

Tuttavia, poichè il confronto tra il piano iperbolico e le superficie a curvatura negativa, sussiste, come abbiam detto, soltanto *per regioni limitate,* non resta così escluso che il postulato euclideo possa dimostrarsi nel *piano completo.*

A togliere questo dubbio converrebbe costruire (se pur esiste) una superficie a curvatura costante negativa,

---

[1] Cfr. Art. 1.

sopra la quale valesse la geometria iperbolica, *in tutta la sua interezza.*

Ma anche dopo di ciò l' indimostrabilità del postulato d' Euclide riuscirebbe provata soltanto *nella geometria piana.* Resterebbe dunque da discutere la possibilità di dimostrare il postulato stesso con *considerazioni stereometriche.*

La fondazione della geometria, secondo le vedute di Riemann (estendenti ad un campo a 3 dimensioni le idee della geometria sopra le superficie) offre la prova completa dell' indimostrabilità, basata sull' esistenza d' un *sistema analitico non-euclideo.* Si tratta dunque di una prova analitica.

Lo stesso può dirsi per gli sviluppi di Helmholtz, Lie; ma questi ultimi offrono, si può dire, anche una prova geometrica, desunta dall' esistenza di *gruppi di trasformazioni dello spazio euclideo, simili ai gruppi di movimenti della geometria non-euclidea.* Ben inteso bisogna quì aver riguardo alla considerazione della geometria nella sua interezza.

Più semplice e geometricamente luminosa, è la *prova dell' indimostrabilità del postulato d' Euclide, desunta dalle metriche-proiettive di Cayley.*

Questa prova si riattacca alla rappresentazione della geometria non-euclidea nella metrica convenzionale relativa ad un assoluto, interpretazione che abbiamo brevemente sviluppata pel caso del piano (§ 19).

E dalle anzidette metriche proiettive scaturisce anche, nel modo più semplice, la prova della possibilità logica dell' ipotesi ellittica di Riemann, senza contraddire al postulato della determinazione della retta.

Soccorre anche quì, limitatamente al piano, la citata interpretazione della geometria ellittica, come *geometria della stella* (cfr. § 14).

II

§ 22. **Prime proposizioni elementari della Geometria.** — Per non dilungarci in cose che, pur essendo di massima importanza pei fondamenti, non riguardano direttamente l' argomento che trattiamo, assumeremo come date:

a) *le proprietà sulla determinazione delle rette, dei piani, delle loro mutue intersezioni* (cfr. Art. 2);

b) *le proprietà segmentarie e la divisione in parti del piano, dello spazio,* ecc.... (cfr. Art. 2);

c) *le proprietà del movimento e della congruenza* (cfr. Art. 3);

d) *il postulato della continuità* (cfr. Art. 4).

Da questo gruppo di proposizioni si deducono i primi teoremi della geometria, dei quali ci sembra opportuno richiamare l' enunciato:

α) *Per un punto dato esiste sempre una ed una sola perpendicolare ad una retta data.*

β) *Due rette perpendicolari ad una terza non sono incidenti.*

γ) *Due triangoli che hanno due lati (due angoli) uguali e l' angolo (il lato) compreso uguale sono uguali.*

δ) *Un triangolo che ha due lati uguali ha gli angoli opposti a questi lati uguali e viceversa.*

ε) *In un triangolo l' angolo esterno è maggiore di uno qualunque degli interni opposti.*

ξ) *In un triangolo, a lati disuguali stanno opposti angoli disuguali, e precisamente al maggior lato si oppone il maggior angolo e viceversa.*

η) *In un triangolo la somma di due lati sorpassa il terzo lato.*

θ) *In un triangolo la somma dei tre angoli non supera due retti* (teorema di Legendre, cfr. I, § 6, *a)*).

ι) *Se in un solo triangolo la somma degli angoli vale due angoli retti, vale pure due angoli retti la somma degli angoli d'ogni triangolo* (teorema di SACCHERI-LAMBERT-LEGENDRE; cfr. I, § 6, *d)*).

κ) *Per un punto fuori di una retta può sempre condursi una seconda retta, che con la prima formi un angolo piccolo a piacere* (cfr. I, § 6, *f)*, Lemma).

Aggiungeremo ancora un altro teorema, che può figurare in questo primo gruppo di proposizioni elementari:

λ) *In un quadrilatero $ABCD$* (Fig. 6 - Tav. I), *che ha due angoli consecutivi $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ retti, se i lati opposti AD, BC sono uguali anche gli altri angoli $\widehat{C}$, $\widehat{D}$ sono uguali, se i lati opposti AD, BC sono disuguali, adiacente al maggior lato sta il minor angolo e inversamente.*

Ecco come può stabilirsi l' enunciato:

Sia OO' la perpendicolare nel punto medio di AB. Se $AD = BC$, un semplice ribaltamento del piano intorno ad OO' prova che $\widehat{D} = \widehat{C}$. Se invece non è $AD = BC$, e precisamente se $AD < BC$, si prenda su BC un segmento $BD' = AD$ e si congiunga D con D'. Dalla considerazione della figura si ottengono immediatamente le relazioni angolari:

$$\widehat{ADC} > \widehat{ADD'} = \widehat{DD'B} > \widehat{DCB};$$

cioè l' angolo $\widehat{D}$ del quadrilatero proposto, adiacente al minore dei due lati AD, BC, è maggiore dell'angolo $\widehat{C}$ dello stesso quadrilatero.

La dimostrazione del teorema inverso si ottiene facilmente ragionando per assurdo.

§ 23. **Fondamenti di una teoria generale delle parallele.** — Dalla proposizione β) del precedente § risulta che per un punto qualunque O del piano passa una retta non incidente ad una retta data AA'. Se si fa

astrazione dal postulato d' Euclide, questa retta per O, che non incontra AA', potrà essere o non essere unica.

Consideriamo l' ipotesi più generale. Per vedere come nel fascio siano disposte le rette che non incontrano la AA' (Fig. 7 - Tav. I), si abbassi da O la perpendicolare OO' alla AA' e quindi si conduca per O la perpendicolare BB' alla OO'. La BB' è la retta non incidente ad AA', cui sopra alludevamo.

Le due rette BB', OO', come è indicato nella figura, dividono il piano in due parti, ciascuna composta di due angoli opposti al vertice; e i due raggi $O'A$, $O'A'$ cadranno il primo nell' una, il secondo nell' altra di queste due parti. Per studiare allora il comportamento delle rette per O, rispetto ad AA', basterà considerare separatamente le rette che cadono nell' una o nell' altra delle due parti suddette, in relazione a quello dei due raggi $O'A$, $O'A'$ che ad essa appartiene.

Riferiamoci, ad esempio, alla porzione di piano tratteggiata sulla figura, e consideriamo la ripartizione che assegna ad una prima classe le rette del fascio incidenti ad $O'A$, ad una seconda classe le rette non incidenti ad $O'A$.

Una tale ripartizione chiaramente soddisfa ai requisiti onde sia applicabile il postulato della continuità, per la qual cosa esisterà un' unica retta II', che separa le due classi. La retta II' appartiene evidentemente alle rette della seconda classe ed è la prima retta che, muovendo nel senso OO', OB, non incontra la AA'.

Ad essa vien riserbato il nome di *parallela* (Lobatscheskij e Bólyai) alla AA' nel *verso* (AA'); e *parallelo* alla AA' viene pure detto il raggio OI della II'.

Ragionando invece sull' altra porzione di piano non tratteggiato nella figura, si giunge ad una nuova parallela OJ', che potrà supporsi generalmente distinta dalla precedente.

Le due parallele, quando sono distinte (caso *iperbolico)*, sono simmetricamente disposte intorno alla perpendicolare OO'; quando invece coincidono (caso *parabolico*) si confondono con la BB', e se ciò accade in ogni caso, passando per un punto una sola parallela ad una retta assegnata, ricadiamo nella geometria d' Euclide.

Riassumeremo dunque dicendo:

Per ogni punto del piano esistono due parallele, distinte o no, ad una retta assegnata. Tali parallele, se sono distinte, dividono il fascio, che ha centro in quel punto, in due parti: all' una appartengono tutte le rette incidenti alla retta data, all' altra le rette non incidenti.

Le rette non parallele e non incidenti ad una retta data (ove esistano) si dicono *non secanti* rispetto a quella retta.

Vediamo ora di stabilire le più interessanti proposizioni sulle parallele.

a) *Se per un punto A e in un dato verso si conduce la parallela AA' ad una retta r, la AA' è anche la parallela, che per ogni punto che le appartiene ed in quel verso, può condursi alla r.*

Sia O un punto di AA', parallela ad r nel senso AA' (Fig. 8 - Tav. I), ed M un punto di r. Si chiamino corrispondenti i raggi che da A ed O proiettano il punto M, qualunque sia la posizione che esso occupa su r. Allora se M, muovendosi su r, s' allontana indefinitamente nel senso del parallelismo, la retta AM tende alla posizione limite AA': dico che anche OM tende allo stesso limite.

Infatti, in primo luogo, è chiaro che OM non può tendere, nel fascio O, ad una retta limite che segua OA', giacchè OA' non incontra la r; in secondo luogo se OM tendesse ad ON, che nel fascio O precede OA', congiungendo un punto qualunque P di ON con A si avrebbe una retta che incontra la r in R, onde la retta OR, che ad essa corrisponde nel fascio O, pure incontrerebbe la r.

Ma fra le due rette ON ed OA' non incidenti ad r non può esistere una secante, onde ecc.

Nella dimostrazione abbiamo supposto che O sia nel raggio AA': se O fosse invece nell'altro raggio che parte da A e non contiene A', cioè se fosse a sinistra di A, per provare anche in questo caso la proposizione enunciata, si supponga che AA' sia per O una retta non secante la r. Allora tracciata per O la parallela ON ad r, nel senso in cui è parallela AA', per A si conduca, nello stesso senso, il raggio AN' parallelo ad ON (il lettore disegni la figura semplicissima). Questo raggio, compreso nell'angolo che la AA' forma con la perpendicolare ad r tracciata per A, è secante la r, e siccome il raggio AN' e la retta r sono da bande opposte della ON seguirebbe che AN' dovrebbe incontrare ON. Da un tale assurdo si deduce la verità della proposizione *a*).

b) *Se AA' è parallela a BB' può sempre condursi per un punto arbitrario O di AA' una tal secante, che, con le rette date, formi angoli interni da una stessa parte uguali.*

Sia O' il piede della perpendicolare calata da O su BB' (Fig. 9 - Tav. I). Escludendo fin da principio che OO' sia perpendicolare anche ad AA', nel qual caso (caso euclideo) il teorema sarebbe già dimostrato, sarà uno dei due angoli adiacenti in O, e precisamente l'angolo $\widehat{A'OO'}$, rivolto verso il senso del parallelismo, minore di un angolo retto, l'altro, $\widehat{AOO'}$, maggiore.

Si prenda allora un punto H, su $O'B$, abbastanza lontano da O', per modo che l'angolo $\widehat{OHO'}$ risulti minore d'una grandezza angolare piccola a piacere (cfr. § 22). Convenientemente scelta una tale grandezza, avremo la relazione:

$$\widehat{AOH} < \widehat{BHO} \qquad (1),$$

mentre invece, pei punti K, presi nel raggio $O'B'$, vale l'altra:

$$\widehat{AOK} > \widehat{OKB} \qquad (2)$$

Se ora si ripartiscono i punti di BB' in due classi, assegnando alla prima classe i punti che, come H, verificano la (1); alla seconda classe i punti che, come K, verificano la (2), otterremo (in base al teorema ε, § 22) una ripartizione soddisfacente a tutte le condizioni onde sia applicabile il postulato della continuità. Esiste perciò un punto P tale che

$$\widehat{AOP} = \widehat{OPB}.$$

La retta OP è la retta richiesta dal teorema.

c) *La relazione di parallelismo fra due rette è reciproca.*

Sia AA' parallela a BB' (Fig. 10 - Tav. I). Per un punto O di AA' si conduca la retta OP, che formi angoli interni da una stessa parte uguali. Se S è il punto di mezzo del segmento OP, il ribaltamento del piano intorno alla perpendicolare ad OP, condotta per S, scambiando fra loro le due rette AA', BB' (in virtù dell' eguaglianza degli angoli interni $\widehat{AOS}$, $\widehat{SPB}$) dimostra appunto la nostra proposizione.

d) *Una retta che lascia da bande opposte due rette parallele è parallela a queste ultime.*

Siano AA', BB' rette parallele nel verso indicato dalla successione delle lettere, e CC' compresa interamente fra di esse (Fig. 11 - Tav. I).

Per un punto H di AA' si abbassi la normale HK su BB' e per H, nell' angolo $\widehat{KHA'}$, si conduca una retta arbitraria HH'. Facciamo vedere che tutte le rette HH', comprese nell' angolo KHA' e che incontrano la BB', necessariamente incontrano anche CC'. Infatti, detto R il punto in cui HH' incontra BB', i punti H ed R, essendo da bande opposte di CC', daranno luogo ad un segmento che incontra CC'.

Da questo e dal fatto che AA' non incontra CC' si deduce che le due rette AA' e CC' sono parallele.

Analoga dimostrazione proverebbe il parallelismo di BB' e CC'.

e) *Due rette parallele ad una terza sono parallele fra loro.*

Siano AA', BB' parallele a CC'. Distingueremo due casi:

1.° CC' lascia da una stessa parte le due parallele AA', BB'.

Basta allora applicare il risultato contenuto in *d*) per stabilire la proposizione.

2.° CC' lascia da bande opposte le due parallele AA', BB'.

Allora se BB' non fosse parallela ad AA' (Fig. 12 - Tav. I) per B potrebbe tracciarsi BB'', parallela ad AA', nel senso in cui è parallela CC'. Le due rette BB'', CC', parallelle nello stesso senso alla AA' e situate da una stessa banda di quest' ultima risulterebbero fra loro parallele. Ma ciò evidentemente è assurdo poichè per B, in un determinato senso, passa una sola parallela alla CC' e questa è la BB'. Segue che BB'' deve coincidere con BB', cioè che BB' è parallela ad AA'.

f) *Se per un punto del piano passano due parallele ad una retta, per ogni altro punto del piano passano due parallele alla stessa retta.*

Sia AA' la retta data, II' la parallela per O nel senso $A'A$; JJ' la parallela per O nel senso AA'. Se supponiamo che O appartenga al semipiano superiore ad AA', basterà dimostrare il teorema pei punti M di questo semipiano, giacchè un semplice ribaltamento intorno ad AA' basterebbe a stabilire il teorema pei punti del semipiano inferiore.

Distinguiamo tre casi, a seconda della posizione che occupa M nel semipiano superiore.

1.° Il punto M appartenga ad uno dei quattro raggi OI, OI', OJ, OJ', ad esempio ad OI (Fig. 13 - Tav. I).

Allora, preso su OJ' un punto N, la retta MN sarà non secante rispetto alla AA'. Esistendo in tal caso per M due rette distinte, non incidenti ad AA', per M passeranno due parallele ad AA'.

2.° Il punto M giaccia esternamente alla regione limitata dalla retta AA' e dai semiraggi OI, OJ'. (Fig. 14 - Tav. I).

Si abbassi da M la perpendicolare su AA' e si indichi con N il punto in cui essa incontra una delle due semirette OI, OJ', ad esempio la OI. Poichè per N passano due parallele ad AA', la MN sarà diversa dalla perpendicolare MN', che da M può condursi ad IO'. Segue che le due normali ad MN ed MN', tracciate per M, saranno distinte, inoltre che tali normali non incontreranno AA'.

Ma se per un punto passano due rette non incidenti ad AA', per quel punto esistono due parallele ad AA'.

3.° Il punto M appartenga alla regione limitata da AA', OI, OJ'. (Fig. 15 - Tav. I).

Si abbassi da M la perpendicolare ad AA', si denoti con N il suo piede e con P il punto in cui incontra (necessariamente) uno dei due raggi OI, OJ'.

Se per M passasse una sola parallela ad AA' essa sarebbe normale ad MN, ed allora, ribaltando il piano intorno a tale parallela, M verrebbe portato in un punto M_1, pel quale, in virtù del principio *e*) e del principio di congruenza, passerebbe ancora una sola parallela ad AA'.

Così proseguendo, per via di ribaltamenti, dopo un certo numero di operazioni si giungerebbe ad un punto M_n, fuori della regione limitata da AA', OI, OJ', pel quale passerebbe ancora una sola parallela ad AA'.

Ma quest' ultimo risultato contraddirebbe a quanto si è stabilito più sopra in 2), sicchè anche per M dovranno passare due parallele ad AA'.

g) *Se per un punto passa una sola parallela ad una retta, per ogni altro punto passa una sola parallela alla stessa retta.*

Questa proposizione è una immediata conseguenza della precedente.

h) *Se per ogni punto del piano passano due parallele ad una retta data, per ogni punto passano due parallele a qualunque retta del piano.*

Infatti un semplice movimento del piano sovrapponendo la nuova retta BB' alla retta AA', primitivamente data, sovrapporrà il punto H, da cui si vogliono condurre le parallele a BB' ad un punto K, per cui passano due parallele alla AA'. Le due parallele ad AA', condotte per K, quando BB' coincide con AA' ed H con K, diventano appunto le due parallele condotte per H a BB'.

i) *Se per un punto qualunque del piano passa una sola parallela ad una retta, passa pure una sola parallela a qualunque altra retta del piano.*

Si deduce dalla precedente proposizione.

Il piano per cui da ogni punto possono condursi due rette parallele ad una retta data è il piano di Lobatschefskij e Bólyai, al quale, come già si disse, il Klein assegnava il nome di piano *iperbolico;* il piano per cui le due parallele coincidono è il piano d' Euclide, detto anche *parabolico.*

È poi chiaro (in base alla possibilità di sovrapporre col movimento due piani arbitrari dello spazio) che:

Se un piano dello spazio è iperbolico tutti i piani sono iperbolici;

ed anche:

Se un piano dello spazio è parabolico tutti i piani sono parabolici.

Lasciando da parte il piano parabolico, giacchè per esso è valida l'ordinaria geometria d' Euclide, rivol-

giamoci al piano iperbolico, per stabilire alcune delle più importanti proposizioni.

III

§ 24. **Geometria iperbolica - Somma degli angoli d'un triangolo.** — Il teorema caratteristico del piano iperbolico è il seguente:

In un triangolo la somma degli angoli è minore di due retti.

A norma del teorema di Saccheri e Legendre (cfr. § 6, *d*) basterà stabilire che esiste un solo triangolo in cui la somma dei tre angoli è minore di due retti.

Si consideri perciò un angolo retto $\widehat{NAM}$, la perpendicolare NN' al lato AN, la parallela AA' ad NN', nel senso indicato dalla figura, (Tav. II - Fig. 16). Denotando con α l'angolo compreso fra AM ed AA', si tracci per A una retta che incontri il raggio NN' sotto un angolo uguale ad α (cfr. § 22, *x*).

Detto P il punto in cui tale retta incontra NN', nel triangolo ANP la somma degli angoli è:

$$\begin{aligned}\widehat{ANP} + \widehat{NAP} + \alpha &= \widehat{ANP} + \widehat{NAM} - \widehat{A'AP} \\ &= 2 \text{ retti} - \widehat{AAP},\end{aligned}$$

cioè minore di due angoli retti.

La differenza fra due angoli retti e la somma degli angoli d'un triangolo, come si disse anche nella I parte (cfr. § 6), verrà denominata *deficienza.*

Il teorema si estende ai poligoni.

La somma degli n angoli d'un poligono convesso è minore di (2*n*-4) *angoli retti.*

Se il poligono è convesso, per stabilire la proposizione, basta decomporre la figura in tanti triangoli con

rette uscenti da un vertice ed applicare agli n-2 triangoli che così si ottengono il teorema del triangolo; se il poligono è concavo (non intrecciato) basta decomporre la figura in tanti poligoni convessi ecc.

La differenza fra 2n-4 *angoli retti e la somma degli angoli d'un poligono chiamasi deficienza del poligono.*

Osservazione. — Dal fatto che in un triangolo la somma degli angoli è minore di due angoli retti segue che nel piano iperbolico *non esistono figure simili.*

Infatti siano ABC, $A'B'C'$ due triangoli simili, se è possibile (Tav. II - Fig. 17). Si sovrapponga il triangolo $A'B'C'$ ad ABC in modo che $\widehat{A'}$ cada su $\widehat{A}$. Se $A'B' < AB$ il punto B' cadrà entro il segmento AB e così pure il punto C' entro il segmento AC, stante che le due rette BC, $B'C'$ non possono intersecarsi. Allora nel quadrilatero $BB'CC'$ la somma degli angoli varrebbe quattro retti, contro ciò che abbiamo sopra stabilito.

§ 25. **Aree**. — Volendo definire la nozione di *area* per le superficie piane, occorre anzitutto mostrare (cfr. Art. 5) che tali superficie, in relazione al concetto geometrico di *somma,* formano una classe di grandezze. Per ciò basta far vedere la possibilità di associare ad ogni superficie una grandezza (o un numero), per modo che « *alla somma geometrica di due superficie corrisponda la somma delle grandezze associate* ».

Quando sia stabilita una siffatta corrispondenza, si ha senz' altro la *proporzionalità* delle superficie considerate alle grandezze associate; sicchè i numeri che misurano queste ultime sono proporzionali alle *aree* o misure delle superficie stesse, il fattore di proporzionalità dipendendo dalla scelta arbitraria dell' unità di misura.

Osservato ciò, si può stabilire la teoria delle aree per i poligoni, nel piano iperbolico, seguendo lo stesso ragionamento adoperato dal Rausenberger per i poligoni

sferici (Art. 5, § 5). Soltanto debbonsi quì considerare le *deficienze* in luogo degli *eccessi.*

Moviamo dunque dall' osservazione fondamentale che (nel piano iperbolico) « *sommando più poligoni si ottiene un poligono composto, la cui deficienza è uguale alla somma delle deficienze dei poligoni componenti* ».

Da questa deduciamo che i poligoni formano una classe di grandezze, proporzionali alle loro deficienze, ossia: *L' area d' un poligono è*, a meno d' un fattore costante (che può scegliersi uguale ad 1), *uguale alla deficienza del poligono stesso.*

Osservazione. — Supponendo a priori concesse alle superficie dei poligoni le proprietà delle grandezze, e operando su di esse (come Euclide) per somma e sottrazione, si può mostrare direttamente che « *due poligoni di ugual deficienza sono equivalenti* ». Per questi sviluppi cfr. p. e. Frischauf « *Elemente der absoluten Geometrie* » (1) o Fano « *Lezioni di Geometria non euclidea* » (2).

§ 26. **Distanza dei punti di una retta arbitraria da una retta fissa.** — Premettiamo le seguenti considerazioni.

Sia s una retta incidente ad r nel punto O. (Tav. II - Fig. 18). Fra le perpendicolari ad r, alcune evidentemente incontrano s; si tratta di stabilire che (in questo caso iperbolico) ne *esistono di quelle che non la incontrano.*

Riferendoci per ciò ad uno dei due raggi che il punto O determina su r, ad esempio al raggio di destra, si innalzi da un suo punto M la perpendicolare, che supponiamo incidente ad s nel punto N. (Se una tale perpendicolare non fosse incidente alla s sarebbe provata

---

(1) Leipzig, 1876.

(2) Roma, 1898. Litografie.

la proposizione che vogliamo stabilire). Il triangolo rettangolo OMN così ottenuto si ribalti intorno ad MN e si denoti con M_1 la nuova posizione di O dopo il ribaltamento. Se α è la deficienza di OMN, sarà 2α la deficienza nel triangolo OM_1N, e maggiore di 2α la deficienza nel triangolo rettangolo OM_1N_1, che ha OM_1 per primo cateto ed il cui secondo cateto M_1N_1 è il segmento che le due rette r, s intercettano sulla perpendicolare condotta per M_1 ad r.

L'operazione, che dal triangolo iniziale OMN ci ha condotti al triangolo OM_1N_1, può ripetersi partendo da quest'ultimo: otterremo (se la perpendicolare M_2N_2 è incidente ad s) un nuovo triangolo OM_2N_2, in cui la deficienza è $2^2\alpha$. Così procedendo, dopo n operazioni, si giungerebbe ad un triangolo OM_nN_n, in cui la deficienza sarebbe $2^n\alpha$, e quindi, per n abbastanza grande, sorpasserebbe 2 angoli retti.

Sicchè dopo un certo numero di operazioni, la perpendicolare, che da M_n può condursi alla r, non incontrerà la s.

Ora è facile vedere come esista sempre una retta determinata, che separa le perpendicolari incidenti alla s da quelle non incidenti. Si consideri perciò la ripartizione dei punti del raggio OM, che si ottiene assegnando ad una prima classe i punti cui corrispondono normali incidenti alla s, ad una seconda classe quelli cui corrispondono normali non incidenti alla s.

È chiaro che la ripartizione così effettuata soddisfa a tutte le condizioni richieste per l'applicazione del postulato della continuità: esiste dunque un punto H che separa le due classi e la perpendicolare ad r, condotta per H, è la retta che separa le normali incidenti da quelle non incidenti. Una tale retta appartiene poi evidentemente alla classe delle normali che non incontrano la s.

Potendosi ripetere lo stesso ragionamento pei punti dell'altro raggio che O determina su r concluderemo che

sopra ogni retta esiste un segmento HK, luogo geometrico dei punti cui corrispondono normali incidenti ad una data retta, che incontra HK.

Rivolgiamoci ora a studiare come varîno le distanze dei punti di una retta arbitraria da una retta fissa.

Distingueremo per ciò tre casi:

a) *Le due rette in discorso sieno incidenti.*

Sia O il punto comune ad r ed s (Tav. II - Fig. 19). Riferendoci ad uno dei due raggi che O determina su s, ad esempio al raggio OP, si abbassino su r, dai punti susseguenti M', N' le perpendicolari che hanno il piede rispettivamente in M ed N. Dei due segmenti MM', NN', lati opposti del quadrilatero $MM'\ N'N$, in virtù del teorema sul quadrilatero stabilito in λ) al § 22, è maggiore NN', perchè adiacente al minor angolo, onde:

Se si considerano punti susseguenti sul raggio OP, i segmenti intercetti sulle corrispondenti perpendicolari alla r formano una successione crescente.

Di più dico che *una tale successione tende all' infinito.*

All' uopo si tracci la perpendicolare HH', che separa fra le normali condotte alla r, quelle incidenti alla s da quelle non incidenti e dal suo piede H si portino, verso H', due segmenti HR, HR', l' uno dei quali, HR, grande a piacere, l' altro, HR', maggiore di HR.

Congiunto R' con O, la perpendicolare ad HH', condotta per R, incontrerà OR' in T. Se da T si abbassa la perpendicolare ad r, cadendo il suo piede Q in OH, la TQ prolungata incontrerà s in T'. Allora, essendo nel quadrilatero $QHRT$ l' angolo in T acuto, avremo:

$$T'Q > TQ > RH;$$

cioè esisteranno su OP dei punti T' pei quali i segmenti di normali corrispondenti superano una grandezza arbitraria HR.

b) *Le due rette date sieno parallele.*

Da un punto N di s si abbassi ad r la perpendicolare e sia M il suo piede. (Tav. II - Fig. 20). Stabiliamo in primo luogo che le distanze dei punti di s da r crescono oltre ogni limite, quando N s' allontana su s nel senso opposto a quello del parallelismo.

Perciò dai vari punti di s, appartenenti al raggio non parallelo, si abbassino le perpendicolari ad r e si determino i segmenti intercetti fra s e la normale NR ad NM. Questi segmenti, essendo maggiori dei segmenti normali che dagli stessi punti di s possono tracciarsi ad NR, formeranno una successione che tende all' infinito. Segue che le distanze dei punti di s dalla retta fissa r, essendo maggiori dei segmenti corrispondenti che terminano ad NR, formeranno esse pure una successione che tende all' infinito.

Si dimostra poi che una tale successione è *crescente* considerando i quadrilateri che hanno i vertici sulle due parallele r, s ed una coppia di lati opposti in due segmenti della successione.

Da questo risultato, applicando il teorema che un lato d' un triangolo è sempre maggiore della somma degli altri due, si deduce, in base al postulato della continuità, che *esiste sempre un segmento ed uno solo, nella successione considerata, uguale ad un segmento arbitrario maggiore di MN.*

Segue allora che *la striscia di piano compresa fra due parallele r, s può sempre sovrapporsi alla striscia compresa fra due altre parallele r', s'.*

Si abbassino perciò dai punti N, N', scelti rispettivamente su s ed s', le perpendicolari NM, $N'M'$, sulle rispettive parallele r, r'. Se $MN > M'N'$ esiste sempre su s' un punto N'' la cui perpendicolare $N''M''$, calata su r', è uguale ad NM. Portando allora la r su r' in modo che MN coincida con $M''N''$, a meno d' un ribal-

tamento del piano intorno ad NM, la retta s coinciderà con s' e la striscia (r, s) con la striscia (r', s').

Dal fatto che due striscie di piano comprese fra parallele sono sempre uguali consegue che *la distanza di due rette parallele, nel senso del parallelismo, va decrescendo e tende allo zero.*

Che una tale distanza vada decrescendo si prova coi soliti quadrilateri, aventi per lati opposti due perpendicolari susseguenti; che tenda allo zero si prova osservando che per un punto, prossimo quanto si vuole ad una retta, passano sempre due parallele a questa retta.

c) *Finalmente supponiamo che le due rette r, s siano non secanti.*

Intanto è chiaro che quando il punto N, fissato su $s \equiv BB'$ (Tav. II - Fig. 21), si allontana su s indefinitamente tanto nell'uno quanto nell'altro senso, le distanze NM finiscono per diventare e mantenersi maggiori d'un segmento scelto grande a piacere.

Si prendano allora due punti, uno P nel raggio NB, l'altro Q nel raggio NB', tali che le loro distanze PP', QQ' da r resultino entrambi maggiori di NM. Applicando il solito ragionamento sui quadrilateri, aventi due angoli consecutivi retti, si prova facilmente che muovendosi P e Q nei due raggi PB, QB' rispettivamente nei sensi PB, QB' i segmenti di perpendicolare ad r, che ad essi corrispondono, vanno crescendo; onde, per quanto sopra si disse, si otterranno due successioni crescenti, aventi entrambe per limite l'infinito.

Segue, pel solito principio di continuità, che fissato un segmento p, maggiore tanto di QQ' quanto di PP', esisteranno due punti, l'uno H in PB, l'altro K in QB', tali che i due segmenti di perpendicolari HH', KK', ad essi corrispondenti, sono uguali al segmento fissato p.

Allora, se pel punto medio O' di $H'K'$ s'innalza la perpendicolare ad r e si segna O nel punto in cui essa

incontra HK, la OO' rappresenta la perpendicolare comune alle due rette r, s; ed è chiaro che allontanandosi da O, tanto in un senso quanto nell' altro, sulla retta s, la distanza da r è sempre crescente.

Concluderemo dunque che:

Nel caso di due rette non secanti esiste sempre una ed una sola perpendicolare comune e il segmento intercetto dalle due rette sulla perpendicolare comune corrisponde alla minima distanza di esse.

§ 27. **Angolo di parallelismo.** — Premettiamo alcune osservazioni.

Siano HA, KB due raggi, α, β gli angoli ch' essi formano col segmento HK (Tav. II - Fig. 22). *Dico che se* $\alpha + \beta \geq 2$ *angoli retti i due raggi* HA, KB *non sono paralleli.*

Sia in primo luogo $\alpha + \beta = 2$ retti. Prolungati allora HA, KB rispettivamente coi raggi HA', KB', si denotino con α', β' gli angoli che questi ultimi formano con HK.

Dall' ipotesi $\alpha + \beta = 2$ retti risulta immediatamente $\alpha = \beta'$, $\beta = \alpha'$, onde l' uguaglianza delle due figure $AHKB$, $A'HKB'$, giacchè esse hanno un lato comune e gli angoli adiacenti a questo lato uguali. Segue da ciò che HA non può essere parallelo a KB, altrimenti, risultando anche HA' parallelo a KB', per H passerebbe una sola parallela a BB'.

Sia, in secondo luogo, $\alpha + \beta > 2$ retti. Preso allora β'' in modo che $\alpha + \beta'' = 2$ retti, si tracci per K, internamente all' angolo $\widehat{BKH}$, una retta KB'', che formi con KH l' angolo β'' (Tav. II - Fig. 22-*bis*).

Per quanto si è visto nel caso precedente, KB'' è non secante rispetto ad HA: a maggior ragione saranno non secanti i raggi HA, KB.

Una facile conseguenza di quanto abbiamo sopra stabilito è la proposizione seguente:

Due parallele tagliate da una terza non formano angoli corrispondenti uguali, e precisamente è minore quello dei due angoli corrispondenti che è esterno alle due parallele.

Ciò posto si fissi un punto arbitrario O del piano e si mandino i raggi OI ed OJ' paralleli ad AA' ed il raggio OO' normale alla stessa retta.

L' angolo $\widehat{IOO'} = \widehat{J'OO'}$, che d' ora in poi denoteremo con ω, verrà detto, secondo la locuzione di Lobatschefskij, *angolo di parallelismo.*

L' angolo di parallelismo è sempre minore di un angolo retto; solo nel caso euclideo raggiunge questo valore. Proponiamoci di studiare la variazione di questo angolo, in relazione alla distanza p di O da AA'.

Intanto è chiaro che per punti equidistanti da AA', potendosi effettuare la traslazione del piano lungo AA', che sovrappone a se stesse le linee di *ugual distanza*, l' angolo di parallelismo ha lo stesso valore.

Basterà dunque considerare come varia quando O si sposta in direzione normale ad AA'.

Siano perciò M, N due punti della normale OO'. ω_m, ω_n i rispettivi angoli di parallelismo. In base ai risultati sopra esposti, se N è più prossimo ad AA' di M, cioè se ω_n è esterno alle due parallele condotte per M ed N alla AA', è chiaro che $\omega_n > \omega_m$, cioè: *l' angolo di parallelismo cresce al decrescere della distanza.*

Sicchè, se denotiamo con p la distanza di un punto dalla retta AA' ed ω il relativo angolo di parallelismo, potremo porre con Lobatschefskij:

$$\omega = \pi\ (p),$$

dove π è simbolo d' una certa funzione decrescente.

Per stabilire poi fra quali limiti varia l' angolo di parallelismo mostriamo che: *ad ogni angolo* ω, *compreso fra*

zero ad un angolo retto, corrisponde sempre un determinato segmento p, tale che $\pi(p) = \omega$.

Siano perciò due raggi OA, OB uscenti da O sotto l' angolo ω (Tav. II - Fig. 23) ed HH' la normale ad OA, che separa le normali incidenti ad OB dalle non incidenti (cfr. § 26). Dico che HH' è parallela ad OB. Infatti, condotto nell' angolo $\widehat{OHH'}$ un raggio arbitrario HK, da un suo punto M si abbassi la perpendicolare ad OA e sia P il suo piede. Poichè P cade nel segmento OH, sarà PM una normale incidente ad OB (Cfr. § 26) nel punto N.

Allora il raggio HM, che incontra il lato PN del triangolo OPN, senza incontrare il lato OP, dovrà necessariamente incontrare ON.

Segue che una retta qualunque, come HM, contenuta nell' angolo OHH', incontra OB. Da ciò e dal fatto che HH' ed OB non sono incidenti si deduce che esse sono parallele, vale a dire che l' angolo di parallelismo che corrisponde alla distanza $p = OH$ è appunto l' angolo ω assegnato.

Segue che la funzione $\pi(p)$, mentre p varia con continuità, crescendo da zero all' infinito, decresce con continuità dal valore dell' angolo retto al valore zero.

Noi qui non possiamo entrare negli sviluppi di calcolo, che permettono di assegnare l' effettiva espressione di $\pi(p)$; ci limitiamo semplicemente ad indicarne il risultato, rimandando per lo svolgimento alle opere che espressamente ne trattano [1]:

$$\omega = \text{arc. sen.} \frac{2\, e^{\frac{p}{k}}}{e^{2\frac{p}{k}} + 1}.$$

---

[1] Cfr. Frischauf, *op. cit.*

IV

§ 28. **Geometria ellittica - Proprietà fondamentali.** — Secondo quanto si disse nella I parte (§ 14), per fondare una geometria piana rispondente ai dati sperimentali conviene partire da una *regione limitata,* ed assegnare in essa i relativi postulati. Sviluppate le prime proposizioni, possiamo richiedere che nell' *intero piano* valgano ancora le proprietà di appartenenza fra punti e rette, le proprietà della congruenza e del movimento, le quali ultime portano che la retta sia una *linea illimitata.*

L' illimitazione della retta può aversi in due casi.

Un primo caso risponde all' ipotesi che essa sia *infinita,* ed allora, dimostrandosi che esistono rette parallele (cfr. § 23, P. II), il sistema geometrico corrispondente sarà il parabolico o l' iperbolico.

Un secondo caso risponde all' ipotesi che la retta sia una *linea chiusa:* il sistema geometrico che così si ottiene è quello ellittico, di cui ora vogliamo occuparci.

La retta, nel sistema ellittico, avrà dunque una *lunghezza finita,* la quale sarà la stessa per tutte le rette, giacchè con un movimento possono sempre sovrapporsi due rette arbitrarie.

Un punto qualunque preso sopra una retta non la divide in due parti; due punti determinano due segmenti, di cui uno verrà detto *supplementare* dell' altro. Per distinguere l' uno dall' altro questi segmenti converrà dare un terzo punto, che appartenga al segmento di cui si intende discorrere.

Due segmenti supplementari sono in generale disuguali: se sono uguali ciascuno di essi vale *mezza retta* ed allora gli estremi di tali segmenti vengono detti punti *opposti* o *coniugati.*

Evidentemente, come tutte le rette sono uguali fra loro, così saranno uguali le mezze rette.

Dal fatto che la retta è una linea chiusa, sempre determinata da due de' suoi punti, seguono i due dati più caratteristici del piano ellittico. Il primo è relativo al comportamento di due rette arbitrarie.

Siano O ed r un punto ed una retta arbitraria del piano. Fissato su r un punto A si proietti A da O, secondo la retta a. Intanto che A descrive r, a descrive il fascio O, sicchè quando A ritorna alla posizione iniziale, dopo aver percorsa sempre in un senso l' intera retta, anche a riprende la posizione iniziale, dopo aver percorso l' intero fascio.

Segue che tutte le rette per O incontrano r onde:

Nel piano ellittico due rette hanno sempre un punto comune, cioè non esistono parallele.

Il secondo fatto è relativo alla connessione, e costituisce una differenza notevole tra la *Geometria ellittica* e *la sferica.* Rammentiamo perciò che una superficie *illimitata* si dice *semplicemente connessa* quando *un qualunque taglio chiuso* la *spezza* in due parti; *doppiamente connessa* quando *due tagli chiusi* la *spezzano* in due parti, senza che ogni taglio chiuso la spezzi; ecc...

Allora, poichè una retta r del piano corrisponde sempre ad un taglio chiuso, è facile vedere come il piano ellittico sia una superficie doppiamente connessa.

In primo luogo si vede che una retta r non divide più il piano in due parti o bande, perchè due punti arbitrari sono sempre congiunti da due segmenti (supplementari), di cui uno necessariamente non deve incontrare la r, onde il piano *non sarà semplicemente connesso.*

È poi facile riconoscere che due tagli chiusi spezzano sempre il piano. Si prendano p. e. due rette arbitrarie di esso r, s, che, in virtù di quanto abbiamo già stabilito, s' incontrano in un punto O. Se A, B sono due

punti del piano, dei due segmenti supplementari a ed a' ch' essi determinano, uno, ad esempio a, incontra la r: se l' altro a' incontrasse la s sarebbe già stabilito che non si può andare da A in B senza attraversare uno dei due tagli r, s. Se invece il segmento a taglia entrambe le rette nei punti R, S si fissi un punto P nell' interno del segmento RS tutto compreso in a, ed un punto Q in a'.

È chiaro che per andare da P a Q occorre attraversare l' uno o l' altro dei due tagli r, s.

Segue da ciò che due tagli chiusi tolgono la connessione del piano, per la qual cosa *il piano ellittico è doppiamente connesso.*

Ciascuna delle due regioni in cui due rette r ed s spezzano il piano viene detta *angolo* e precisamente si diranno *supplementari* due angoli che presi insieme diano l' intero piano.

Due angoli supplementari saranno in generale disuguali: se sono uguali ciascuno vale un mezzo piano e si denomina *angolo retto.*

I lati dell' angolo retto si dicono poi *perpendicolari l' un l' altro* od anche *rette coniugate.*

§ 29. **Perpendicolari. Polarità assoluta.** — Fissata una retta r ed altre due rette p, q ad essa perpendicolari, si consideri la *simmetria* del piano intorno ad r, la quale si può effettuare con un *ribaltamento* del piano stesso intorno ad r.

Le due perpendicolari verranno entrambe sovrapposte ciascuna a sè stessa, ed il loro punto comune O verrà pure in O. Segue che ogni retta per O, incontrando la r in un punto, che nella detta simmetria rimane fisso, verrà sovrapposta a sè stessa, cioè sarà perpendicolare ad r.

Inoltre è pure chiaro che ogni perpendicolare s ad r passa per O, altrimenti nella nominata simmetria

i punti comuni ad s ed alle rette per O rimarrebbero fissi, il che manifestamente è assurdo.

Concluderemo dunque che:

Tutte le perpendicolari ad una retta costituiscono l' insieme delle rette passanti per un punto.

Ad ogni retta del piano viene in tal guisa associato un punto: il centro del fascio delle perpendicolari. Questo centro verrà detto *polo* della retta.

Vale allora il teorema:

Il luogo geometrico dei poli delle rette di un fascio è una retta, che ammette per polo il centro del fascio.

Sia O il centro del fascio, p, q due rette per esso. (Tav. II - Fig. 24). Detti P, Q i rispettivi poli, si tracci la retta PQ. Essendo una tal retta perpendicolare tanto a p quanto a q, saranno alla lor volta p, q perpendicolari a PQ, onde O sarà il polo di PQ. Dico che su PQ cadono i poli di tutte le rette per O. Sia s una tal retta ed S il suo polo. Per lo stesso ragionamento fatto sulla PQ, la retta PS ammette per polo il punto O, onde la retta OP ammette per perpendicolari tanto QP quanto PS.

Ma in un punto d' una retta non può innalzarsi che una sola perpendicolare ad essa retta; per la qual cosa, dovendo le due QP, PS coincidere, sarà il punto S in linea retta coi due punti P, Q.

Dalla proposizione così stabilita segue che ad ogni punto può associarsi un' unica retta, che diremo *polare* del punto. Si ottiene così nel piano ellittico una corrispondenza *(polarità assoluta)* fra punti e rette, dotata della proprietà fondamentale:

Se a è la polare del punto A, reciprocamente A è il polo della retta a.

Vale poi il seguente teorema:

La polare di un punto O è il luogo geometrico dei punti coniugati di O, su tutte le rette che passano per esso.

Basta infatti osservare che un semplice ribaltamento di O intorno alla sua polare o sovrappone a sè stesso il punto O e tutte le rette per O.

La polare è adunque il luogo geometrico dei punti che distano da O d' un segmento uguale alla semiretta.

§ 30. **Angoli e segmenti associati. Loro misura.** — Si considerino due rette uscenti da un punto O ed i due punti A, B ch' esse determinano sulla polare di O. (Tav. II - Fig. 25). Fissato uno dei due angoli che le due rette date formano in O, ad esempio quello tratteggiato sulla figura, si *associ* ad esso quello dei due segmenti che, avendo gli estremi in A e B, cade nell' interno dell' angolo e si denoti con a questo segmento. All' angolo supplementare (quello non tratteggiato nella figura), secondo tale legge, verrà evidentemente *associato* il segmento a', supplementare di a.

È chiaro che due angoli uguali avranno segmenti associati uguali; che angoli disuguali avranno segmenti associati disuguali, e precisamente al maggior angolo sarà associato il maggior segmento; che un angolo somma di più altri ha per segmento associato la somma dei segmenti associati ai detti angoli. Segue da ciò che se α, β sono due angoli, a, b i relativi segmenti associati:

$$\alpha : \beta = a : b$$

onde: *se si assume per unità di misura degli angoli l' angolo associato all' unità di misura dei segmenti, gli angoli ed i segmenti associati saranno rappresentati dal medesimo numero* (che ne esprime la loro misura).

Notiamo poi che trattandosi di considerare l' angolo come regione piana di punti, ossia come *settore angolare*, anzichè l' intera porzione di piano compresa fra i due lati dell'angolo conviene prendere una delle due porzioni uguali in cui la polare del vertice spezza la detta porzione e ciò

per mantenere più che sia possibile l' accordo fra la geometria ellittica e le geometrie iperbolica e parabolica.

§ 31. **Legge di dualità nel piano ellittico.** — La polarità, da quanto abbiamo veduto, ad ogni figura del piano ellittico permette di associare un' altra figura, detta *figura polare o duale,* che sta ad essa nella relazione seguente: *ad ogni punto e ad ogni retta della figura data corrisponde rispettivamente una retta ed un punto nella figura polare.* Suppongasi ora che la primitiva figura goda di una certa *proprietà grafica*, vale a dire d' una proprietà che esprima l' appartenenza di punti e rette: la figura polare gode evidentemente di un' altra proprietà, che può dirsi *duale* della precedente, e che da essa si deduce scambiando fra loro, nell' enunciato della prima, le parole *retta*, *punto* ed introducendo quelle modificazioni che da un tale scambio derivano.

Ad esempio se in una figura più rette $a, b, c \ldots$ passano per un punto O, nella figura duale i punti A', B', $C' \ldots$, che ad $a, b, c \ldots$ rispettivamente corrispondono, giacciono nella retta o', corrispondente ad O.

Vale dunque nel piano ellittico la *legge di dualità* della *geometria proiettiva,* la quale, com' è noto, permette di associare ad ogni *proprietà grafica* del *piano* un' altra proprietà *(proprietà duale)*, che si deduce dalla prima operando lo scambio delle parole punto e retta ecc.

Mostriamo ora come la detta legge di dualità, nel piano ellittico, valga anche per le *proprietà metriche delle figure.*

Per giungere a questo risultato conviene spendere qualche altra parola sul modo di ricavare da una figura, in cui si considerino *segmenti* ed *angoli*, la figura duale.

Sia perciò ACB un determinato segmento della retta o ed a, b, le polari dei suoi estremi A, B.

Detti A', B' i punti in cui a, b incontrano o è chiaro che le due coppie di punti A, B; A', B' non si separano su o. Se il segmento ACB è maggiore di una semiretta, i punti $A'B'$ apparteranno al segmento ABC; se il segmento ACB è uguale ad una semiretta il punto A' cade in B e B' in A; finalmente se ABC è minore di una semiretta i punti $A'B'$ cadono entrambi nel segmento supplementare.

Si fissi, ad ogni modo, dei due segmenti che A', B' determinano su o, quello che contiene C. È chiaro allora che i due segmenti ACB, $A'CB'$ sommati danno l'intera retta, talchè, denotando con a il primo ed a' il secondo, potremo scrivere

$$a + a' = \text{retta}.$$

Chiameremo allora angolo polare di a l'angolo α', associato al segmento a', supplementare di a; viceversa *segmento polare di α' il segmento a associato all'angolo α, supplementare di α'.*

È chiaro che se b' è il segmento polare di β viceversa β è l'angolo polare di b'.

Con queste convenzioni rimane pienamente determinato quali segmenti e quale angoli vengano in considerazione nella figura polare di una figura data.

Se poi conveniamo di rappresentare i segmenti e gli angoli a mezzo di numeri, come fu indicato nel § 29, rammentando che un angolo ed il suo segmento associato sono rappresentati dal medesimo numero, avremo fra due figure polari la seguente relazione:

Detti a, b, c, ... ; α, β, γ, ... i segmenti e gli angoli d'una data figura ed a', b', c'.... ; α', β', γ'.... i segmenti e gli angoli della figura polare, dove le lettere rappresentano numericamente le grandezze in discorso, qualora

siasi assunta come unità di misura angolare l'angolo retto e per misura lineare la semiretta, avremo:

$$\left.\begin{array}{l} a + \alpha' = 2 \\ b + \beta' = 2 \\ c + \gamma' = 2 \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} (1) \left\{\begin{array}{l} a' + \alpha = 2 \\ b' + \beta = 2 \\ c' + \gamma = 2 \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Allora è chiaro che se in una data figura F alcuni *segmenti* od *angoli* sono uguali fra loro, nella figura duale f' gli *angoli* ed i *segmenti* corrispondenti sono pure fra loro uguali; cioè *la relazione di uguaglianza si conserva nella trasformazione polare.* Se invece in F due segmenti a, b (od angoli α, β) soddisfano alla relazione $a > b$ ($\alpha > \beta$), nella figura f' gli angoli α', β' (i lati a', b') che ad essi corrispondono, in virtù delle relazioni (1) soddisfano alla disuguaglianza inversa, $\alpha' < \beta'$ ($a' < b'$), per cui le *relazioni di maggiore o minore, nella trasformazione polare, vengono invertite.*

Tenendo presenti i risultati cui siamo pervenuti è chiaro che *ad ogni proprietà metrica della figura F corrisponde una proprietà metrica della figura polare f, la quale si ottiene scambiando nell' enunciato relativo ad F la parola punto con la parola retta, la parola segmento con la parola angolo, la parola maggiore con la parola minore, ed introducendo quelle modificazioni di parole che da tali scambî derivano.*

Osservazione. — Si noti la perfetta analogia fra il piano ellittico e la *stella* (l'insieme delle rette e dei piani che passano per un punto). Alla polarità nel piano ellittico corrisponde nella stella la *polarità assoluta,* che ad ogni retta fa corrispondere il piano perpendicolare.

In tale polarità ad ogni diedro si fa corrispondere un determinato angolo, ottenuto innalzando dal centro della stella (che appartiene alla costa del diedro) le

perpendicolari ad ogni faccia del diedro, dalla parte ove si trova l' altra faccia. Fra il rettilineo α (sezione normale) del diedro e l' angolo a' così costruito si sa che sussiste la stessa relazione $\alpha + a' = 2$ (retti), che noi abbiamo stabilito fra gli elementi corrispondenti sul piano ellittico.

Segando la stella con una sfera, che abbia il suo centro nel centro della stella, gli angoli piani della stella vengono a corrispondere ad archi di cerchio massimo sulla sfera, gli angoli diedri della stella ad angoli sulla sfera, alla polarità della stella la polarità sulla sfera. Sulla sfera, come del resto è noto, vale dunque una legge di dualità analoga a quella che abbiamo veduto sussistere sul piano ellittico.

§ 32. **Proprietà fondamentali dei triangoli.** — Tre rette del piano, che s' incontrano nei punti A, B, C, determinano quattro triangoli Δ_1, Δ_2 Δ_3, Δ_4, dei quali, nella figura (Tav. II - Fig. 26), non è completamente visibile che Δ_4.

Stante la convenzione fatta al § 29, circa ciò che deve intendersi per angolo come settore, avremo, denotando con α, β, γ rispettivamente gli angoli in A, B, C del triangolo Δ_4:

$$2\alpha = \Delta_1 + \Delta_4, \quad 2\beta = \Delta_2 + \Delta_4, \quad 2\gamma = \Delta_3 + \Delta_4;$$

onde:

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + 2\,\Delta_4;$$

da cui, essendo

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4$$

uguale all' intero piano, cioè a quattro angoli retti:

$$2\,(\alpha + \beta + \gamma) = 4R + 2\Delta_4;$$

od anche:

$$\alpha + \beta + \gamma = 2R + \Delta_4.$$

Segue il teorema caratteristico del piano ellittico:

a) *La somma degli angoli d'un triangolo è maggiore di due angoli retti.*

Se inoltre si indica con ε *l'eccesso* o differenza fra la somma degli angoli d'un triangolo, numericamente rappresentata, e il numero 2, che corrisponde all'angolo piatto, cioè a due angoli retti, avremo

$$\varepsilon = \Delta_4 .$$

Onde: *L'area d'un triangolo è uguale* (o proporzionale) *al suo eccesso* (cfr. § 25).

b) *In un triangolo la somma di due angoli è sempre inferiore a due angoli retti, aumentati del terzo angolo.*

Si ha invero:

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\ R + \Delta_4 ;$$

od anche:

$$\alpha + \beta + 2\gamma = 2\ R + \gamma + \Delta_4 .$$

Osservando poi che $2\gamma > \Delta_4$, si deduce:

$$\alpha + \beta < 2R + \gamma .$$

c) *In un triangolo la somma dei lati non può sorpassare* $4r$, denotando r la semiretta.

Siano a, b, c i lati d'un triangolo, a'', b'', c'' i segmenti associati agli angoli α', β', γ' del triangolo polare. Avremo allora (cfr. § 30):

$$a + a'' = 2r, \quad b + b'' = 2r, \quad c + c'' = 2r ;$$

onde sommando:

$$(a + b + c) + (a'' + b'' + c'') = 6r.$$

Ma essendo

$$\alpha' + \beta' + \gamma' > 2R,$$

sarà

$$a'' + b'' + c'' > 2r,$$

onde:

$$a + b + c < 4r.$$

d) *In un triangolo ogni lato è minore della somma degli altri due.*

Siano a, b, c i lati d'un triangolo; α', β', γ' gli angoli del triangolo polare; a'', b'', c'' i segmenti associati ad α', β', γ'.

Allora essendo:

$$\alpha' + \beta' = 2R + \gamma'$$

sarà:

$$a'' + b'' < 2r + c'';$$

onde, sostituendo a'', b'', c'' con $2r\text{-}a$, $2r\text{-}b$, $2r\text{-}c$:

$$(2r\text{-}a) + (2r\text{-}b) < 2r + (2r\text{-}c),$$

cioè:

$$c < a + b.$$

Quest' ultima proprietà ci permette di asserire che la retta, anche sul piano ellittico, è *geodetica.*

Errata-corrige. — Nella Fig. 5 - Tav. 1 debbono scambiarsi le lettere b, a'.

Alla citazione dell' opera di FIEDLER, nella nota a pag. 184, deve aggiungersi l' osservazione che il birapporto può essere definito (con STAUDT) senza ricorrere alla misura dei segmenti; cfr. KLEIN: *Vorlesungen ueber die Nicht-Euklidische Geometrie.* (Litografie Göttingen, 1889-90-93).

ARTICOLO SETTIMO

« **Sui metodi elementari per la risoluzione dei problemi geometrici** » di Ettore Baroni a Prato.

§ 1. **Considerazioni preliminari.** — È noto che la via naturale da tenersi per cercare la soluzione di un problema geometrico consiste nel ridurlo ad un altro già risoluto, passando dal problema proposto ad uno *equivalente*, oppure tale che abbia fra le sue soluzioni quelle del problema dato, da questo ad un altro, e così via fino a giungere, come si è detto, ad un problema che si sappia risolvere *(analisi)*.

A questo metodo di ricerca che, come è chiaro, non dà una via sicura da percorrere, ma semplicemente indica un modo per dirigere i nostri tentativi, è di aiuto la figura, ossia la rappresentazione più generale possibile dei dati e quella approssimata (quando se ne conosca la specie) degli enti che si cercano, tenuto conto delle condizioni che li devono legare agli enti dati.

In sostanza si suppone determinato l' ente incognito od una sua parte e si cerca, considerando la figura, e conducendo, allorchè si creda opportuno, delle linee ausiliarie, di trasformare le relazioni che legano i dati agli enti incogniti, se occorre cambiando questi in altri,

per mezzo dei quali essi siano determinati, e che più convengano, in maniera da effettuare il passaggio ora detto.

Quando ciò riesca a dare la risoluzione completa del problema, occorrerà descrivere la *costruzione* che ci porta dagli enti dati ai cercati (se il problema non è impossibile) e dimostrare che gli enti trovati con tale costruzione sono tutti o in parte soluzioni del problema dato; questa dimostrazione riesce superflua quando si sia sicuri di essere passati sempre per problemi equivalenti. Finalmente, potendosi i dati presentare in differenti casi tali da dare soluzioni differenti per numero e qualità, bisognerà cercare di distinguere questi diversi casi; ciò è ufficio della *discussione*, alla quale dunque spetta di vedere se i dati possano essere del tutto generali, oppure debbano soddisfare a certe condizioni (che si dovranno determinare) perchè il problema possa avere soluzioni.

Il procedimento sopra indicato mette in luce che la risoluzione di un problema consiste sostanzialmente nella riduzione di esso ad altri problemi, i quali si considerano come già risoluti. Si perviene così ad alcuni *problemi fondamentali* la cui risoluzione si suppone data da un postulato.

I postulati concernenti le costruzioni (fondamentali) atte a risolvere i problemi che si considerano come fondamentali, si riattaccano immediatamente all' uso degli *istrumenti* adoperati per tali costruzioni.

Nella Geometria elementare del piano si assumono come costruzioni fondamentali quelle date dalla *riga* e dal *compasso*, cioè le seguenti:

1) determinazione della retta che passa per due punti dati;

2) determinazione del punto comune a due rette date (non parallele);

3) determinazione del cerchio di centro dato che passa per un punto dato;

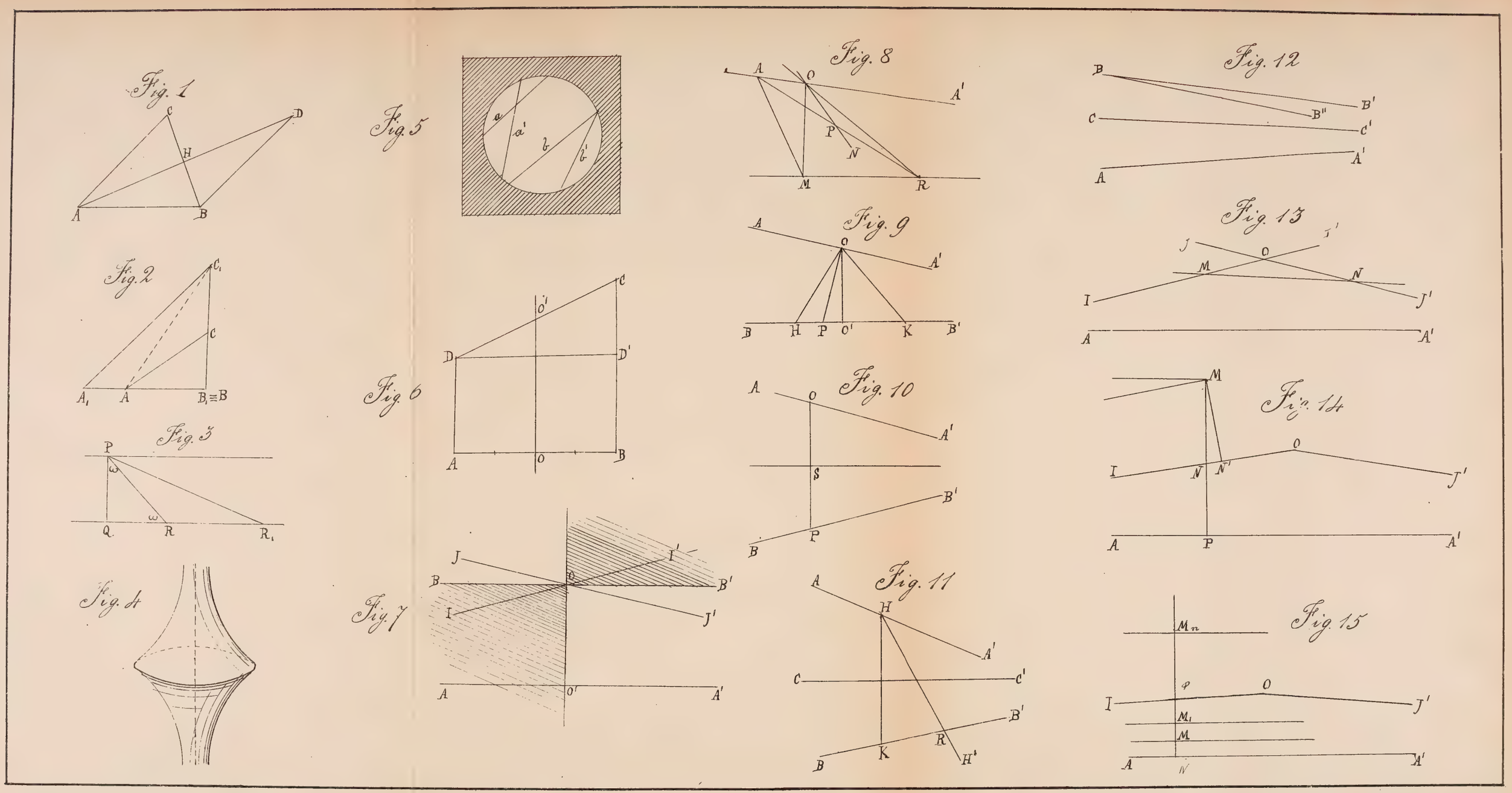


Fig. 1
C
D
H
A
B
Fig. 2
C1
C
A1
A
B1≡B
Fig. 3
P
ω
Q
R
R1
Fig. 4
Fig. 5
a
a'
b
b'
Fig. 6
C
O'
D
D'
A
O
B
Fig. 7
J
I'
B
O
B'
I
J'
A
O'
A'
Fig. 8
A
O
A'
P
N
M
R
Fig. 9
A
O
A'
B
H
P
O'
K
B'
Fig. 10
A
O
A'
S
B'
B
P
Fig. 11
A
H
A'
C
C'
B'
R
B
K
H'
Fig. 12
B
B'
B''
C
C'
A'
A
Fig. 13
J
O
J'
M
N
I
J'
A
A'
Fig. 14
M
O
I
N
N'
J'
A
P
A'
Fig. 15
Mn
φ
O
I
J'
M1
M
A
N
A'

Tav. I.

Fig. 16

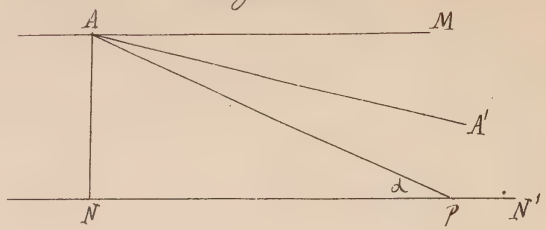


Fig. 17

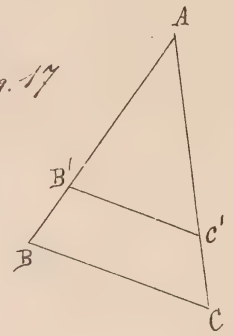


Fig. 18

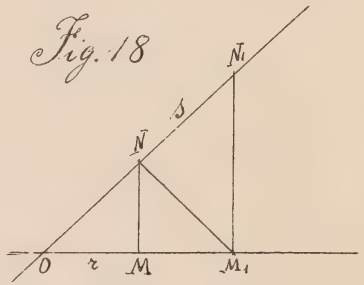


Fig. 19

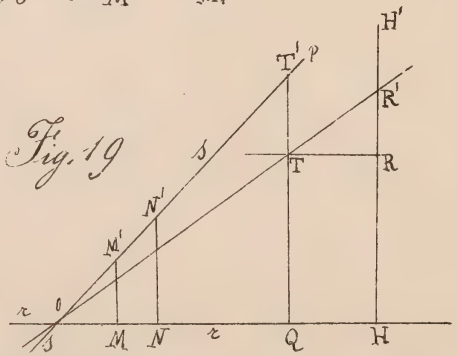


Fig. 20

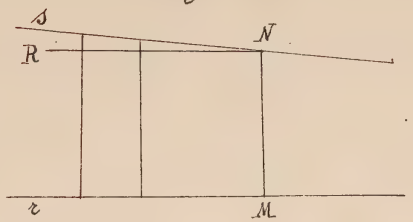


Fig. 21

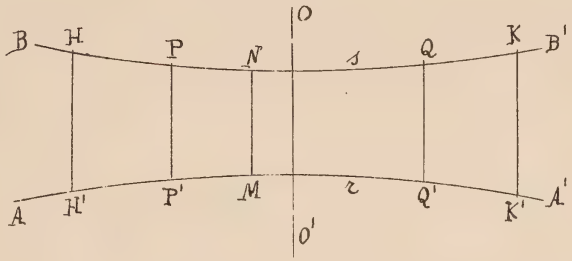


Fig. 22

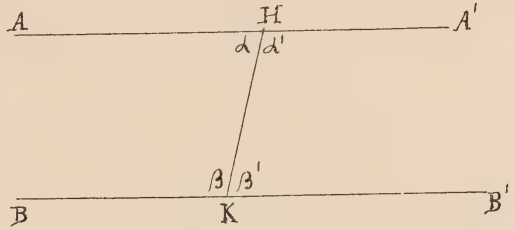


Fig. 22 bis

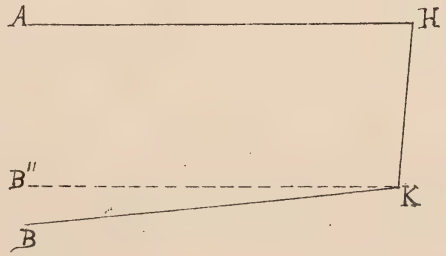


Fig. 23

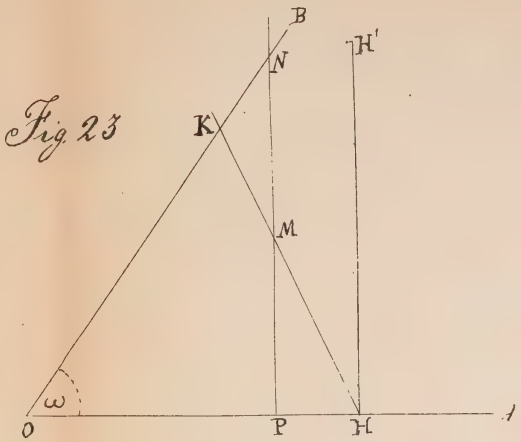


Fig. 24

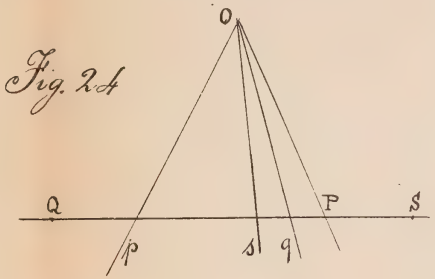


Fig. 25

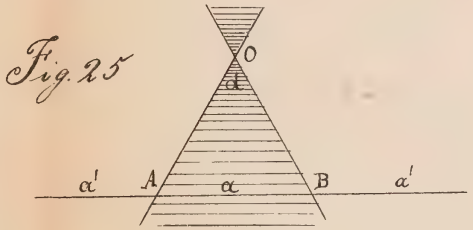
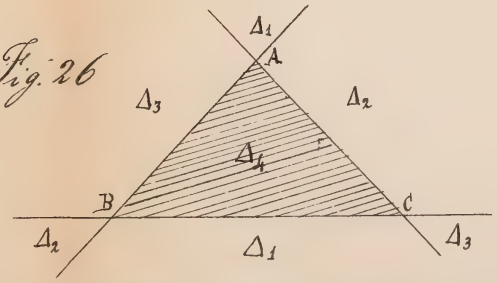


Fig. 26



Tav. II.

4) determinazione dei punti comuni ad un cerchio dato e ad una retta secante;

5) determinazione dei punti comuni a due cerchi dati, secantisi.

Un problema si considera come *risolubile elementarmente* allorchè la sua risoluzione si può ricondurre alle costruzioni fondamentali sopra citate.

Occorre distinguere bene i due concetti di *possibilità* e di *risolubilità* di un problema. Un problema è possibile allorchè esso ammette soluzioni; ma può darsi che tali soluzioni non sieno ottenibili mediante le anzidette costruzioni fondamentali (cioè colla riga ed il compasso); allora il problema è elementarmente irrisolubile. Insistiamo sul fatto che il concetto della risolubilità di un problema è relativo; in senso assoluto qualunque problema possibile dovrebbe riguardarsi come risolubile, purchè si adoprassero per la sua risoluzione convenienti costruzioni fondamentali date da istrumenti appropriati (più complessi della riga e del compasso).

Per i problemi della Geometria nello spazio occorrerebbe dare a priori altre costruzioni fondamentali, che, nel campo elementare, sono quelle relative alla determinazione di piani e sfere e alle loro mutue intersezioni.

Ma nel seguito limiteremo la nostra esposizione ai problemi della Geometria del piano.

§ 2. **Ricerca di luoghi geometrici.** — Nella ricerca dei luoghi geometrici di punti, seguendo il metodo sopra accennato, si suppone di conoscere, non il luogo cercato (giacchè andando senza nessuna guida si potrebbe essere trascinati molto lontani dal vero), ma un punto del luogo, e si cerca di trasformare le condizioni che lo legano ai dati in modo da ricondurre la ricerca di quel luogo a quello di uno già conosciuto, oppure di scoprire

una proprietà che esso abbia in comune cogli infiniti punti di una figura che si possa costruire coi dati. Si potrà avere una certa guida nello scoprire questa figura quando si riesca a conoscere che alcuni punti speciali, determinabili coi dati, fanno parte del luogo, giacchè allora si potrà vedere se il luogo domandato è una delle figure più semplici, a cui quei punti appartengono. Così sapendo che due certi punti fanno parte del luogo, si potrà provare se il luogo è il segmento o la retta determinata da quei punti, oppure il cerchio che lo ha per diametro.

Ciò appare naturale quando si pensi che i soli luoghi, la cui determinazione costituisce un problema elementarmente risolubile, sono quelli composti di rette, segmenti, cerchi, o archi di cerchi.

Consideriamo come esempio il noto problema:

Determinare il luogo geometrico dei punti le cui distanze da due punti dati A, B hanno un rapporto uguale a quello dei segmenti p e q.

Per ogni punto P del luogo si dovrà avere

$$PA : PB = p : q \quad (1).$$

Siccome si sa che esistono due punti C, D l'uno interno e l'altro esterno al segmento AB tali che

$$AC : CB = p : q$$
$$AD : DB = p : q,$$

così viene subito fatto di pensare che il luogo cercato possa essere un cerchio di diametro CD. Così è infatti, giacchè riesce facilissimo dimostrare che ogni punto P che soddisfa alla (1) è su questo cerchio, e reciprocamente, che ogni punto di questo cerchio soddisfa alla (1).

§ 3. **Risoluzione di problemi determinati col metodo dei luoghi geometrici.** — Non esiste un metodo generale, per la risoluzione dei problemi geometrici deter-

minati (finchè almeno non si entri nel campo della geometria analitica), ma esistono vari metodi speciali che servono a risolvere diverse classi di problemi. La esposizione di questi metodi sarà fatta qui seguendo i principali lavori sull'argomento ed accompagnando sempre l' esposizione generale del metodo da un esempio semplice, di cui sarà accennata la soluzione [1].

Il metodo più generale ed importante è quello dei *luoghi geometrici.*

Se la determinazione dell'ente geometrico, soluzione del problema dato, è o può ridursi con considerazioni preliminari alla determinazione di un punto, come succede nella maggior parte dei casi, allora si può fare astrazione da una delle condizioni imposte per determinare la sua posizione, in modo che il gruppo delle condizioni rimanenti determini un certo luogo geometrico di punti sul quale si troverà il punto cercato. Si riprenderà poi la condizione tralasciata trascurandone invece

---

[1] Ai metodi elementari per la risoluzione dei problemi geometrici si riferiscono principalmente i seguenti lavori:

PETERSEN JULIUS: *Metodi e teorie per la risoluzione dei problemi di costruzioni geometriche* (Trad. italiana di V. MOLLAME, Copenaghen 1881). — BETTAZZI RODOLFO: *La risoluzione dei problemi numerici e geometrici* (Paravia 1893). — ALESSANDROFF IVAN: *Problèmes de Géométrie élémentaire.* Traduit par D. AITOFF (Paris, Gauthiers-Villars 1899).

Si può anche consultare:

LAMÉ: *Examen des différentes méthodes employées pour resondre les problèmes de Géométrie.* — PAUL SERRET: *Des méthodes en Géométrie* (Paris, Mallet Bachelier 1865). — DUHAMEL: *Des méthodes dans les sciences de raisonnement* (Paris, Gauthiers-Villars, I et II partie 1865. III partie 1868, IV partie 1870). — ROUCHÉ ET DE COMBEROUSSE: *Traité de Géométrie* (Paris, Gauthiers-Villars 1879). — VALLE GUIDO: *Metodi per la risoluzione dei problemi geometrici elementari.* (Appunti litografati. Torino, Torelli).

Si trovano infine accenni ad alcuni dei metodi esposti nella eccellente raccolta di esercizi del prof. PINCHERLE (Manuali Hoepli) e nella Geometria del FAIFOFER.

un' altra per avere un secondo luogo geometrico, al quale pure apparterrà il punto richiesto.

Trattandosi di problemi della geometria del piano, l' intersezione di codesti due luoghi, quando esista, darà il punto domandato.

È poi evidente che la scelta del punto da determinarsi, e quando le condizioni a cui esso deve soddisfare sono più di due, la scelta di quelle che devono lasciarsi da parte, determinerà la semplicità della risoluzione.

Questo metodo dei luoghi geometrici, che è quello che viene in uso più di frequente, serve molto bene per la discussione dei problemi, giacchè si avranno le condizioni di possibilità di un problema cercando le condizioni perchè i luoghi determinati per la sua soluzione abbiano punti in comune, il numero delle soluzioni (differenti poi o no) nel numero di questi punti.

Esempio. *Costruire un triangolo BAC conoscendo un lato a, la mediana m relativa a questo lato, e sapendo inoltre che $AB : AC = p : q$, dove indichiamo con p e q segmenti dati.*

Preso $BC \equiv a$ è chiaro che a determinare il triangolo basta il vertice A di esso che deve soddisfare a due condizioni:

1.° di avere da C e B distanze tali che

$$AB : AC = p : q;$$

2.° di distare dal punto medio O di CB di un segmento uguale ad m.

Trascuriamo la seconda condizione: il luogo geometrico dei punti che soddisfanno alla prima è un cerchio che ha per diametro i punti che dividono internamente ed esternamente il segmento AB nel rapporto $p : q$. Tralasciamo invece la prima condizione: il luogo dei punti che soddisfano alla seconda è un

circolo col centro in O e raggio m. Il punto cercato si trova all' intersezione di questi due cerchi e si vedrebbe facilmente che il problema o non ammette soluzioni o ne ammette una, considerando come una unica le soluzioni uguali ma poste diversamente.

In alcuni casi si può non avere bisogno di ambedue i luoghi geometrici ma potrà servire uno solo, quando sia data una linea su cui il punto cercato deve giacere.

Esempio. *Dati tre punti A, B, C non situati in linea retta, ed una retta AD del loro piano passante per uno di essi, A, descrivere un circolo passante per A e B che incontri AD in un punto E tale che EC sia tangente a questo cerchio.*

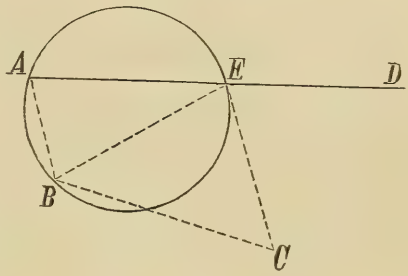


Fig. 1.

Supponendo, come sempre, il problema risoluto, si vede che l' angolo BEC è uguale all' angolo BAD, e perciò E è un punto da cui si vede BC sotto l' angolo BAD conosciuto. Trascurando la condizione che E si debba trovare su AD, la condizione rimasta determina il luogo geometrico dei punti da cui si vede BC sotto l' angolo BAD e su cui si deve trovare il punto richiesto, che sarà quindi all' intersezione di AD con questo luogo.

Si potrebbe seguire un metodo analogo quando la incognita fosse una retta, servendoci degli inviluppi di rette, a determinare i quali si procederebbe come abbiamo fatto per i luoghi geometrici.

Relativamente al metodo dei luoghi geometrici faremo ancora la seguente osservazione.

Questo metodo è il più generale per la risoluzione dei problemi; ma la sua applicabilità, nel campo ele-

mentare, è limitata dalla condizione che i luoghi geometrici da determinare debbono essere elementarmente costruibili, e quindi esser composti di rette, circoli, segmenti o archi di circolo.

Si consideri ad es. il problema:

Determinare un triangolo conoscendo la base AB, l' angolo opposto α, e la somma $AC + BC \equiv s$ degli altri due lati.

Il vertice incognito C, si presenterebbe come una delle intersezioni di due luoghi geometrici: il luogo dei punti da cui si vede il segmento AB sotto l' angolo α, che è costituito da archi di circolo, e il luogo dei punti per cui la somma delle distanze da A e B ha il valore costante s. Ma quest' ultimo luogo è un ellisse, e perciò non è costruibile elementarmente.

Così nel caso accennato l' applicazione più naturale e diretta del metodo dei luoghi non conduce ad una risoluzione elementare del problema.

Conviene allora ricorrere ad una opportuna trasformazione del problema stesso. Il che può farsi nel modo seguente.

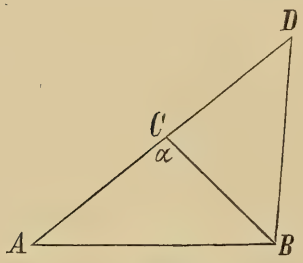


Fig. 2.

Supposto il problema risoluto (Fig. 2), si prolunghi il lato AC del segmento $CD \equiv CB$. La costruzione del triangolo ACB ci riconduce subito a quella del triangolo ADB, del quale sono dati due lati AB e $AD \equiv s$, e l' angolo $\widehat{ADB} \equiv \frac{1}{2}\alpha$.

Quest' ultimo triangolo si ottiene facilmente determinando i punti D comuni a due luoghi geometrici: il luogo dei punti da cui si vede il segmento AB sotto l' angolo $\frac{1}{2}\alpha$, che è costituito da due archi di circolo;

e il luogo dei punti distanti da A di s, cioè il cerchio di centro A e raggio s.

§ 4. **Metodo di similitudine.** — Quando la figura da costruire sia da determinarsi con tali condizioni, che tralasciandone alcune, le rimanenti determinino un sistema di figure simili, si adoprerà a trovare la soluzione questo metodo che divide la quistione proposta in due:

1.° Determinare un sistema di figure simili alla richiesta.

2.° Tenendo conto delle condizioni tralasciate, scegliere fra queste quella che conviene al problema.

Si hanno due casi ben distinti, a seconda che le condizioni relative alla seconda questione sono di tal natura da determinare la *grandezza* della figura richiesta, oppure la sua *posizione* nel piano.

Nel primo caso sono dati angoli, rapporti di segmenti (condizioni che servono a risolvere la prima delle parti in cui abbiamo diviso il problema) ed un segmento (condizione che serve per la seconda parte).

Nel secondo caso sono dati al solito angoli e rapporti di segmenti, e si impone inoltre che la figura richiesta debba avere una posizione determinata rispetto a qualche ente dato, per es. contenere un dato punto, contenere una tangente ad un cerchio dato ecc.

Esempio 1.° *Costruire un triangolo ABC conoscendo l'angolo α, il rapporto dei lati AC, AB che lo comprendono ($AC : AB = m : n$), e la lunghezza w_a della bisettrice relativa all'angolo α.*

Si costruisca un triangolo PAQ soddisfacente alla prima ed alla seconda condizione. Per determinare il triangolo simile a PAQ e che soddisfi alla terza condizione, si prenda, a partire da A sulla bisettrice dell'angolo $\widehat{PAQ}$, un segmento $AOD \equiv w_a$ e da D si conduca la

parallela a PQ. Il triangolo che così si determina è il triangolo richiesto.

Esempio 2.° *In un triangolo BAC iscrivere un parallelogramma, di cui un angolo coincida coll' angolo $\widehat{BAC}$ del triangolo, e tale che i lati stieno fra loro come i segmenti m, n.*

I vertici del parallelogramma richiesto devono essere uno in A, il secondo su AB, il terzo su AC, il quarto su BC. Tralasciando quest' ultima condizione, si avranno infiniti parallelogrammi che soddisfano alle altre condizioni imposte: il quarto vertice di ciascuno di questi parallelogrammi sarà situato su di una retta passante per A, la quale potrà facilmente determinarsi, costruendo uno dei parallelogrammi suddetti. Il parallelogramma richiesto sarà quello fra questi infiniti che ha il quarto vertice nel punto in cui la retta anzidetta incontra BC.

§ 5. **Metodo di moltiplicazione.** — Data una figura qualunque ed un punto O, scelto come centro di similitudine, si può sempre costruire una figura omotetica alla prima, e tale che il rapporto di due segmenti che da O vanno ai punti omologhi, sia uguale a quello dei segmenti m, n affetto dal segno $+$ o $-$ (omotetia diretta od inversa), cioè tale che unendo il centro O con un punto A della prima figura il raggio OA incontri la seconda in un punto A' per cui

$$\frac{OA}{OA'} = \pm \frac{m}{n},$$

dove A, A' saranno dalla medesima parte di O se vale il segno superiore, da parti opposte se vale quello inferiore.

Quando si eseguisce tale operazione sopra una figura, si dice che si moltiplica la figura data per $\pm \frac{m}{n}$ rispetto al punto scelto come centro d' omotetia, ed è chiaro che moltiplicando, per esempio, una retta, si ottiene un' altra

retta parallela alla data, moltiplicando un circolo un nuovo circolo. Con ciò che precede sarà facile risolvere il problema:

Essendo a, a' due linee ed O un punto del loro piano posto fuori di esse, condurre per O una retta tale che, detti A, A' i punti di incontro di questa retta rispettivamente con a, a', si abbia

$$\frac{OA}{OA'} = \pm \frac{m}{n},$$

dove m, n sono segmenti dati.

La retta cercata è quella che unisce O col punto d'incontro di a con la linea che si ottiene moltiplicando a' per $\pm \frac{m}{n}$ rispetto ad O.

Esempio. *Costruire un triangolo, dati due lati a, b e la mediana m_c relativa al terzo lato.*

Descritti col centro in un punto qualunque C due cerchi concentrici di raggi a, b, e preso $CD \equiv m_c$, si moltiplichi per -1 uno dei cerchi, per esempio quello di raggio b, rispetto a D. Si avrà un cerchio di raggio b e di centro C_1 simmetrico di C rispetto a D. Se B è un punto d'incontro di questo cerchio con quello di raggio a, ed A quello di BD col cerchio di raggio b, sarà ACB il triangolo richiesto.

Il metodo di moltiplicazione ora esposto è come si vede, un caso speciale di quello della similitudine, ma si può pure riguardare come caso speciale del metodo dei luoghi geometrici.

§ 6. **Metodo del problema contrario.** — Nel metodo delle figure simili si tratta in sostanza di costruire una figura F' simile alla figura F, che risolve il problema proposto, per ottenere poi da questa F' la F prendendo una figura simile col rapporto di similitudine uguale al rapporto di un segmento di F' al segmento

noto che si sa essergli omologo in F. Ora se il problema è tale che le condizioni imposte si possano dividere in due C_1, C_2, le prime atte a determinare le infinite figure simili alla figura incognita, le seconde a scegliere fra queste quella che ha una certa relazione con una figura data, e se per ognuna delle infinite figure determinate dalle C_1 esiste un' unica figura simile alla data e tale che questa e la figura scelta abbiano fra loro la relazione determinata dalle C_2, si potrà avere F' se si riuscirà a risolvere il problema seguente, che si dice *problema contrario.* Presa una figura simile alla richiesta, (tenendo conto delle condizioni C_1) costruire una figura simile alla data del problema primitivo e che abbia con questa la relazione che appariva avere dalla F la figura data rispetto all' incognita.

È sopratutto utile questo metodo quando si tratti di iscrivere in un poligono P un poligono simile ad un altro Q, giacchè per il problema contrario esistono intanto dei luoghi geometrici per i vertici del poligono circoscritto, nei segmenti descritti sui lati del poligono Q o di uno simile e capaci degli angoli di P.

Esempio. *In un triangolo ABC iscrivere un triangolo simile al triangolo DEF in modo che il vertice omologo a B cada nel puuto P di AB.*

Si circoscriva ad un qualunque triangolo $D'E'F'$, simile a DEF, od anche a DEF stesso un triangolo $A'B'C'$ simile ad ABC e tale che il punto D' divida $A'B'$ nel rapporto di AP a PB. Ciò si può fare tracciando, esternamente al triangolo, su $F'D$, un segmento capace dell' angolo $\widehat{CAB}$, su ED' un segmento capace dell' angolo $\widehat{ABC}$, e conducendo col metodo di moltiplicazione un segmento $A'B'$ tale che:

$$A'D' : D'B' = AP : PB,$$

infine unendo B' con E', A' con F'.

La figura simile a quella ora descritta con AB, omologo di $A'B'$, darà la soluzione cercata.

§ 7. **Metodi di trasformazione.** — I metodi esposti fin qui, i quali consistono in sostanza nel considerare una parte delle condizioni imposte in modo da ottenere una infinità di enti che vi soddisfino, e nello scegliere fra questi quelli che convengono anche alle altre condizioni prima tralasciate, non sempre si possono applicare immediatamente a causa della posizione relativa dei dati, della forma delle condizioni, del genere dei dati e delle incognite.

È utile allora in alcuni casi fare prima delle speciali *trasformazioni* dei dati, delle condizioni imposte, delle incognite; ed è parlando di questi *Metodi di trasformazione* che termineremo l' esposizione dei Metodi Elementari che possono servire alla risoluzione dei problemi di costruzioni geometriche.

Ad una semplicissima trasformazione abbiamo accennato già. Essa consiste nel considerare invece dell' incognita, triangolo, cerchio ecc. uno o più punti, trovati i quali, l' ente richiesto sia determinato. Ma nel seguito la parola « *trasformazione* » verrà presa nel senso più ristretto di trasformazione puntuale eseguita nel piano.

§ 8. **Metodo di trasformazione per raggi vettori reciproci.** — Tenendo presenti le relazioni che corrono fra una figura e la sua inversa o trasformata per raggi vettori reciproci — conservazione degli angoli, contatto, che la inversa di una retta è una retta od un cerchio, secondochè la retta passa o no per il centro d' inversione; la inversa di un cerchio è una retta od un cerchio, secondochè il cerchio passa o no per il centro stesso ecc., — si potrà cercare di ricondurre mediante una trasformazione per raggi vettori reciproci, scelti convenientemente il centro

e la potenza d' inversione, il problema dato ad un altro noto, od a cui si veda come applicare i metodi già esposti, od in generale, la di cui soluzione presenti minori difficoltà a causa della natura degli enti in cui si trasformano gli enti dati e quelli cercati.

Esempio. *Descrivere un cerchio passante per un punto dato P e che tagli ortogonalmente due cerchi dati di centri O, O'.*

Se si fanno le inverse dei due cerchi dati con P, centro d' inversione, e colla potenza uguale, per esempio, alla potenza di P rispetto al cerchio di centro O (per semplicizzare la costruzione, giacchè così questo cerchio si trasforma in sè stesso), l' inversa del cerchio richiesto si cambia in una retta che, dovendo tagliare ortogonalmente il cerchio di centro O e quello inverso del cerchio di centro O', sarà la retta dei centri. Da ciò la facile soluzione del problema dato.

Per definizione è noto che detto O il centro d' inversione, F' l' inversa di una figura F rispetto ad O, una retta qualunque uscente da O incontra F, F' in due punti A, A' tali che il rettangolo di OA, OA' è costante anche in segno *(potenza d' inversione)*, intendendo che i due punti A, A' sono da parte opposta di O se il segno attribuito è negativo, dalla medesima parte nel caso contrario.

Ricordando ciò, è facile risolvere il problema generale.

Date due linee a, a' ed un punto O fuori di esse, condurre per O una retta tale che, detti A, A' i punti di incontro di questa retta con a, a', il rettangolo di OA, OA' sia equivalente ad uno dato (con segno stabilito).

Il metodo che serve a risolvere tale problema, analogo a quello di moltiplicazione, ci appare anche come una forma speciale del primo metodo indicato dei luoghi geometrici.

Esempio. *Costruire un triangolo ABC di cui si conosca: il rettangolo iscritto $EFGH$, avente due vertici consecutivi*

su BC, l' angolo α sui lati del quale cadono gli altri due ed il rettangolo R dei segmenti che il vertice H determina sul lato AB.

L' analisi mostra che il vertice A dell' angolo α del triangolo richiesto si trova su di un segmento posto al di fuori del rettangolo dato e da cui si vede HG sotto l' angolo α; inoltre A si deve trovare sopra la linea inversa della retta EF, preso per centro H e per potenza d' inversione R, cioè su di un cerchio passante per H, il quale potrà avere quindi un altro solo punto in comune coll' arco capace dell' angolo α.

§ 9. **Traslazione parallela.** — La difficoltà di risolvere un dato problema può dipendere in alcuni casi dalla posizione relativa che debbono avere gli elementi noti; nella traslazione parallela si cerca di porre gli elementi dati, trasportandone alcuni parallelamente a loro stessi, in modo da rendere possibile la costruzione di una qualche figura, nota la quale, agevolmente si possa trovare la soluzione del problema dato.

Per esempio, mediante la traslazione parallela, quando sieno dati due segmenti anche di posizione, si può costruire un triangolo avente per lati codesti segmenti e per angolo compreso quello delle rette a cui i segmenti appartengono; si applica appunto la traslazione parallela quando sono noti angoli di rette alle quali appartengono segmenti dati e non aventi punti in comune, giacchè si possono avvicinare a formare triangoli, poligoni ecc.

Esempio. *Costruire un trapezio, dati i due lati paralleli AB, CD, l' angolo α che fanno i lati non paralleli, ed il rapporto di questi due lati.*

Immaginando che il trapezio $ABCD$ sia quello richiesto, si trasporti il lato AD parallelamente a sè stesso in CE. Del triangolo ECB così formato, si conosce

un lato, differenza delle basi AB, CD, l' angolo α ed il rapporto degli altri due lati.

Il problema è quindi ricondotto ad un altro facile a risolversi col metodo dei luoghi geometrici.

Le traslazioni dei lati di un triangolo e di un quadrangolo offrono facile risoluzione di un esteso numero di problemi.

In un triangolo qualunque ABC (Fig. 3) trasportando AC parallelamente a sè stessa in BD, prendendo AE uguale ed adiacente ad AB e considerando i triangoli EDC, AED ADC, AEC, sarà facile riconoscere le seguenti proprietà:

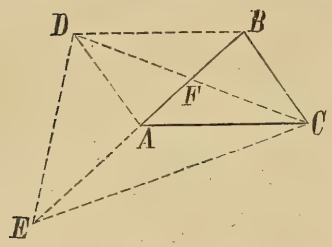


Fig. 3.

I lati di EDC sono doppi delle mediane di ABC e ad esse paralleli (DC ed FC sono propriamente posti sulla medesima retta).

I lati di ABC sono due terzi delle mediane di EDC ed A è il baricentro di questo triangolo.

Due delle altezze dei triangoli AED, AEC, ADC sono uguali a due altezze del triangolo dato e la superficie di EDC è tripla di quella di ABC.

Allorchè saranno dati tali elementi di ABC da rendere possibile, tenuto conto delle proprietà ora enunciate, la determinazione di uno dei triangoli EDC, AED, ADC, AEC, il triangolo ABC sarà sempre costruibile.

Esempio. *Costruire un triangolo ABC data una mediana m_a, l' angolo che fanno fra loro le altre due m_b, m_c, e sapendo che*

$$m_b : m_c = p : q,$$

dove p, q sono segmenti dati.

Nel triangolo EDC si conosce $DC = 2\, m_a$, il rapporto degli altri due lati e l' angolo α tra essi compreso. La risoluzione del problema dato è ricondotto a quello

già accennato, in cui si tratta di costruire un triangolo, dati un lato, l'angolo opposto ed il rapporto degli altri due.

Nel quadrangolo $ABCD$ trasportando AB, AD parallelamente a loro stessi in CF, CE, si otterrà un parallelogramma $BDEF$ che avrà i lati uguali e paralleli alle diagonali del quadrilatero, le diagonali doppie dei segmenti che uniscono i punti di mezzo dei lati opposti del quadrangolo ed a questi parallele. Di più due dei segmenti, che da C vanno ai vertici del parallelogramma, sono lati del quadrangolo dato e gli altri due sono uguali ai lati restanti; inoltre gli angoli, che essi formano, sono uguali agli angoli del quadrangolo stesso.

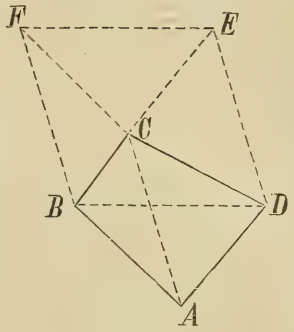


Fig. 4

Ancora in questo caso, quando sieno dati tali elementi del quadrangolo da poter costruire, tenuto conto delle proprietà enunciate, il parallelogramma $BDEF$ ed il punto C, il quadrangolo si potrà costruire.

Esempio. *Costruire un quadrilatero $ABCD$, dati i segmenti a, b che uniscono i punti di mezzo dei lati opposti, l'angolo α che essi fanno fra loro e due lati consecutivi $BC \equiv c$, $DC \equiv d$.*

Il problema, per ciò che abbiamo sopra accennato, si riconduce all'altro:

Costruire il purallelogramma $DBFE$, conosciute le diagonali $2a$, $2b$ e l'angolo α che esse formano; quindi determinare nel suo interno un punto C che disti da B e da D rispettivamente dei segmenti d, c.

In generale poi colla traslazione si può risolvere il problema:

Essendo a, a' linee ed m un segmento dato dai due punti C, D, determinare sopra a, a' due punti A, A' tali che il segmento AA' sia uguale e parallelo al segmento CD.

§ 10. **Ribaltamento intorno ad un asse.** — Col ribaltamento del piano intorno ad una retta si cercano i medesimi vantaggi per cui si adopra la traslazione parallela: avvicinare elementi dati, introdurre elementi noti, come somme o differenze di segmenti, di angoli, sovrapporre enti incogniti eguali a fine di eliminarne uno.

Questo metodo si può anche chiamare metodo di *simmetria*, poichè la trasformazione data dal ribaltamento è appunto una simmetria del piano rispetto ad una retta. S' intende che per riuscire ad una trasformazione effettiva, debbono essere sostituiti coi loro simmetrici, soltanto una parte degli elementi che entrano in considerazione.

Esempio 1.° *Costruire un triangolo ABC data la differenza $AD - DC \equiv d$ delle proiezioni di AB e BC sul terzo lato, l' altezza h_b relativa a questo e la differenza δ degli angoli $A\widehat{C}B$, $B\widehat{A}C$* (Fig. 5).

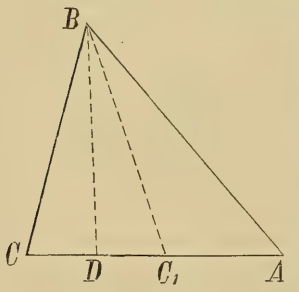


Fig. 5.

Immaginiamo, al solito, il problema risoluto; si ruoti BC intorno all' altezza BD in BC_1: si ricondurrà così la costruzione di ABC a quella di ABC_1 di cui è noto $AC_1 \equiv d$, l' angolo $C_1BA \equiv \delta$ e l' altezza $BD \equiv h_b$, costruzione che è facile eseguire servendosi del metodo dei luogo geometrici.

Esempio 2.° *Dati due cerchi rispettivamente di centro O O', posti da una medesima parte di una retta AB, determinare su di essa un punto P, tale che condotte le*

tangenti PD, PC ai due cerchi, gli angoli CPA, DPB siano uguali (Fig. 6).

Supponendo il problema risoluto, si consideri il cerchio simmetrico a quello di centro O' rispetto ad AB: una sua tangente sarà la tangente CP del cerchio di centro O. Perciò il problema è ricondotto all' altro: Dati due cerchi di centro O, O' (il cerchio di centro O'' essendo il simmetrico del cerchio di centro O') determinare la tangente comune.

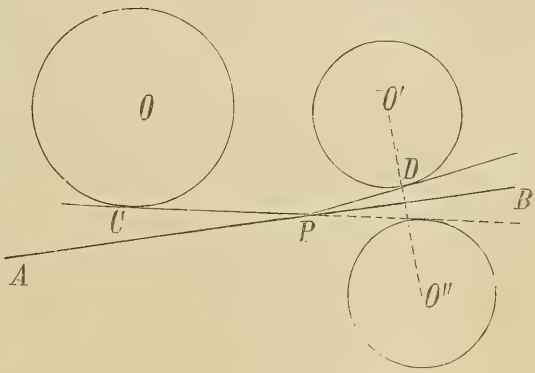


Fig. 6.

Con questo metodo si può anche risolvere facilmente il problema:

Essendo a a' due linee e data una retta, determinare due punti A, A' rispettivamente posti sopra a, a' in modo che la retta data sia l' asse del segmento AA'.

§ 11. **Rotazione intorno ad un punto.** — Se dopo aver fatto ruotare una linea piana intorno ad un punto qualunque del suo piano di un angolo α, si moltiplica la linea ottenuta per un rapporto m rispetto a questo stesso punto O, si ottiene una figura simile alla data, che si dice ottenuta dalla linea data *moltiplicandola per* m_v rispetto ad O: O si chiama *centro di rotazione*, m *rapporto di rotazione*, v *angolo di rotazione.*

Quando si conoscano o si sappiano scegliere convenientemente, questi elementi, la rotazione può servire ai medesimi scopi per cui si adoprano la traslazione e

la rotazione intorno ad un asse, cioè a ravvicinare elementi dati, a far coincidere angoli ecc. e serve inoltre a far coincidere segmenti dìsuguali non paralleli, moltiplicando una parte della figura per m_v (dove m è il rapporto di quei due segmenti, v l'angolo delle rette a cui essi appartengono) rispetto al punto d'incontro di queste rette, e ciò allo scopo di rendere possibile la costruzione di una certa parte della figura, dalla quale poi si possono dedurre le altre parti incognite.

Esempio. *Costruire un quadrilatero*

$$ABCD, \text{ dati } BC \equiv m, \ CD \equiv n,$$

sapendo inoltre che

$$AB : AD = p : q, \ AC : AD = r : s, \ \widehat{ABC} + \widehat{ADC} \equiv \alpha,$$

dove p, q, r, s sono segmenti ed è $\alpha < 2$ retti (Fig. 7).

Supponiamo il problema risoluto. Si moltiplichi il segmento BC per m_v rispetto ad A, preso come centro, e con $m = \frac{p}{q}$ e $v \equiv BAD$. Ottenuto il segmento ED, sarà $EDC \equiv \alpha$ e si avranno quindi dati sufficienti per determinare il triangolo EDC. Di più avendosi

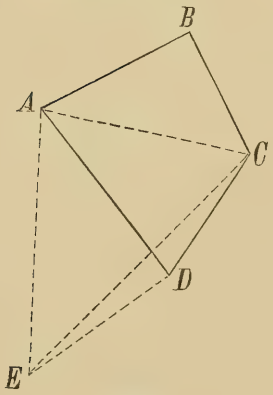


Fig. 7.

$$AC : AE = p : q$$
$$AC : AD = r : s$$

il punto A sarà determinabile (metodo dei luoghi geometrici). Mediante AC, BC e l'angolo $\widehat{ABC} \equiv \alpha - \widehat{ADC}$ sarà pure determinabile B.

La risoluzione del nostro problema è quindi riportata a quella di altri più semplici.

Colla rotazione intorno ad un punto si possono risolvere quei problemi che si riconducono alla costru-

zione di un triangolo simile ad un triangolo dato, nota la posizione di un vertice (che si prende per centro di rotazione) e quando si voglia che gli altri due vertici debbano trovarsi sopra due linee date (rette, archi di cerchio).

Esempio. *In un parallelogramma $ABCD$ iscrivere un altro parallelogramma di cui si conosca l' angolo α delle diagonali e si sappia che il rapporto di queste è uguale a quello dei segmenti dati p e q.*

Sia $EFGH$ il parallelogramma richiesto. Il punto O d' incontro delle sue diagonali sarà il punto d' incontro delle diagonali del parallelogramma dato. Sia il triangolo EOH che abbia $\widehat{EOH} \equiv \alpha$ e tale che

$$EO : OH = p : q = m.$$

Preso un triangolo PRQ coll' angolo $PRQ \equiv \alpha$ e coi lati che lo comprendono, per esempio, uguali ai segmenti p e q, il problema dato è ricondotto all' altro:

Costruire un triangolo simile al triangolo PQR col vertice R in O e coi vertici P e Q rispettivamente sui segmenti AD, DC.

Ciò si ottiene moltiplicando DC per $m\alpha$: il punto d' incontro del segmento ottenuto con AD, se esiste, è il punto richiesto E, l' altro H si ottiene facilmente.

Se invece del rapporto dei lati del triangolo fosse dato il loro rettangolo R è facile vedere che si dovrebbe prendere l' inversa di DC rispetto ad O colla potenza d' inversione R e questa inversa farla ruotare dell' angolo α.

Date nel piano due figure simili F, F', non omotetiche [1], sarà facile determinare gli elementi O, m, v

---

[1] Se F, F' fossero omotetiche, per portare F a coincidere con F' basterebbe una moltiplicazione.

della rotazione atta a portare la F a coincidere colla F È chiaro che l' angolo v di rotazione sarà l' angolo di due rette omologhe, il rapporto m quello di due segmenti omologhi di F, F'.

A determinare O basta osservare che il centro di rotazione, il punto comune a due rette omologhe e una coppia di punti omologhi si devono trovare sullo stesso cerchio: perciò si avrà in modo unico il punto O, prendendo due coppie di punti omologhi su due rette che si tagliano e conducendo due di tali cerchi che hanno oltre O un punto comune nell' incontro delle due rette. Si può anche determinare il punto O in generale, notando che il rapporto delle distanze di O da due punti omologhi è il rapporto stesso di rotazione.

Dopo ciò sarà facile determinare il centro di rotazione di due punteggiate simili, in cui si sono date due coppie di punti omologhi e di due cerchi su cui è data una coppia di punti, costituendo i centri un' altra coppia di punti omologhi e risolvere quindi quei problemi in cui date due rette, una condizione che determini il rapporto di rotazione, una coppia di punti omologhi, si cerchi un' altra coppia di punti omologhi delle due punteggiate simili che soddisfino ad un' altra condizione, come essere posti su di una retta parallela ad una retta data o passante per un punto dato o tali che il loro segmento sia uguale ad un segmento dato, oppure gli altri problemi, in cui sono dati due cerchi e su questi due punti omologhi e se ne vogliano trovare due altri che soddisfino ad un' altra condizione.

Esempio. *Date due rette concorrenti: i punti A, A' in esse, determinare due punti X, X' rispettivamente su di esse in modo che sia*

$$AX : AX' = p : q \text{ e } XX' \equiv a$$

essendo p, q, a segmenti dati.

Se immaginiamo il problema risoluto: A, X; A', X' determineranno due punteggiate simili: sia O il loro centro di rotazione. I triangoli AOA', XOX' sono simili; perciò, trovato O, il problema si riporta alla costruzione di un triangolo simile ad AOA' con a omologo di AA'.

Per determinare O, presi sulle rette due punti B, B' tali che

$$AB : AB' = p : q,$$

si ripeterebbe la costruzione già indicata.

ARTICOLO OTTAVO

“ Sulla risoluzione dei problemi geometrici col compasso „ di Ermenegildo Daniele a Torino.

Il raggruppamento in un corpo organico, compiuto dagli antichi geometri, delle costruzioni che si eseguono col solo uso della riga e del compasso, o, come si suol dire, con metodo Euclideo, risponde senza dubbio al bisogno da essi sentito di separare dal rimanente della scienza geometrica a loro nota, una parte, la quale si potesse considerare come il capitolo più semplice della geometria, quel capitolo che dovesse riuscirne come la necessaria introduzione. Non vi è bisogno di discorrere della perfezione del lavoro condotto a termine da quei geometri: la resistenza al tempo ed ai continui progressi della scienza dimostrata dall' opera di Euclide (la quale di tutto quel lavoro deve considerarsi come la sintesi) ne è la prova più evidente.

Il metodo impiegato da Euclide per eseguire le costruzioni elementari è fondato sull' uso di due strumenti primordiali, la riga ed il compasso, che egli suppone di poter adoperare senza alcuna restrizione; egli ammette cioè di poter segnare in qualunque parte del

piano del disegno una retta, e di potervi descrivere un cerchio col centro in un punto qualunque e di raggio arbitrario. Queste condizioni grafiche sono parti essenziali del metodo di Euclide; e se la natura delle linee, di cui in esso si fa uso, gli conferisce una semplicità grandissima, ognuno vede che vi si gode ancora di una libertà grafica assai ampia; non riesce perciò fuori di luogo domandarsi se quei medesimi problemi non sarebbero egualmente risolubili con mezzi grafici più ristretti. Tale domanda ammette una risposta affermativa: basterà citare, fra gli altri, i tentativi, completamente riusciti, dei geometri italiani del sec. XVI, Ferrari, Tartaglia, Benedetti, i quali risolvettero tutti i problemi contenuti nei libri di Euclide colla riga ed un compasso ad apertura fissa; la risoluzione di molti problemi ottenuta da Brianchon senza il compasso; la riduzione, fatta da Poncelet e Steiner, nell' uso delle circonferenze, ad una sola fissa nel piano del disegno e di centro noto (cfr. art. 9); in un altro indirizzo la riduzione degli strumenti di disegno al solo compasso, per opera di Lorenzo Mascheroni, coll' abolizione completa della riga.

Non è mio compito di parlare delle ricerche che ebbero per iscopo di limitare al minimo il tracciamento di circonferenze, poichè di questo argomento altri avrà da occuparsi in un successivo articolo; mi fermerò invece su quella che può chiamarsi la « Geometria del compasso », dimostrando come ogni problema, risolubile colla riga e col compasso, si possa risolvere soltanto con quest' ultimo, senza la riga. Tutto ciò che occorre per questa dimostrazione è contenuto nel libro di L. Mascheroni intitolato *Geometria del compasso*, che è il primo, cronologicamente, ed il più importante studio sulle costruzioni con sole circonferenze. Pubblicata a Pavia nel 1797, l' opera del Mascheroni incontrava tosto molto

favore, tanto che nel 1798 ne compariva la traduzione francese fatta dal Carette; questa traduzione si ristampava nel 1828, mentre, quasi contemporaneamente, il Grüson pubblicava la versione tedesca della *Geometria del compasso.* Accennerò appena, fra i varii estratti o rimaneggiamenti del libro di Mascheroni, a quelli di Frischauf (Graz, 1869) e di Hutt (Halle, 1880); ricorderò ancora due Note recenti, una del sig. Eug. Dubouis (*Journal de Math.*, 22, 1897), l'altra del sig. G. Cesaro (*Mémoires de la société royale des sciences de Liège*, 1899), i quali, entrambi, ignorando l'esistenza di precedenti lavori sull'argomento, ritrovano, mediante costruzioni dello stesso tipo di quelle del Mascheroni, la possibilità di sostituire il compasso alla riga in tutte le costruzioni elementari; degna di menzione, come applicazione dei metodi di Mascheroni, è poi la divisione della circonferenza in 17 parti eguali, eseguita dal sig. Gérard (*Math. Ann.*, 48, 1897) col solo compasso.

I procedimenti geometrici, di cui si fa uso nei lavori di Mascheroni e degli autori nominati in seguito, sono di natura affatto elementare. Di fronte a questi va collocato un breve studio di Adler (*Zur Theorie der Mascheroni'schen Constructionen*; Wiener Berichte, 99, 1890), il quale, uscendo dal campo propriamente elementare, ed esaminando la questione della Geometria del compasso da un punto di vista più elevato, riuscì a dimostrare la risolubilità, col solo compasso, dei problemi Euclidei, giovandosi di un unico principio, e precisamente della trasformazione per raggi vettori reciproci.

Come si vede, la letteratura delle costruzioni per sole circonferenze è, se non ricca, per lo meno discreta; tuttavia, se si astrae dalla Nota dell'Adler e da alcuni problemi speciali trattati col metodo di Mascheroni (fra cui il più notevole è quello menzionato del Gérard), non si può dire che le ricerche, compiute dall'autore

della *Geometria del compasso,* abbiano gran che fornito ai geometri occasione di spingersi a studi ulteriori sull'argomento. È un male, perchè questo genere di ricerche non solo potrebbe condurre a risultati interessanti come curiosità scientifica, ma potrebbe anche rendere un buon servizio nel campo didattico.

§ 1. **Considerazioni preliminari.** — In un problema di Geometria gli elementi, che si tratta di determinare in relazione e in conseguenza ai dati, si riducono sostanzialmente a punti, poichè, quand'anche il problema richieda il tracciamento di rette o di circonferenze, esse si possono costruire, mediante la riga ed il compasso, quando se ne conoscano rispettivamente due punti, oppure il centro e la lunghezza del raggio (questa lunghezza a sua volta è determinata mediante due punti). Quanto ai punti che si cercano, essi sono sempre determinati dall'intersezione mutua di rette e di circonferenze; ora ammettendo che si possa adoperare con piena libertà tanto la riga che il compasso, si possono ritenere risolti senz'altro i problemi seguenti:

1) Trovare il punto comune a due rette,

2) Trovare i punti comuni ad una retta e ad una circonferenza,

3) Trovare i punti comuni a due circonferenze.

Imponendoci al contrario la condizione di non adoperare la riga (nel qual caso si potrà ancora avere sul disegno le circonferenze completamente descritte, ma una retta verrà rappresentata soltanto mediante due suoi punti), dei problemi precedenti solo il terzo sarà di soluzione immediata, mentre per i due primi bisognerà indicare delle costruzioni apposite, che non si trovano nei libri di Euclide. Volendo dunque dimostrare che i problemi risolubili con metodo Euclideo si risolvono pure facendo uso del solo compasso, basterà, in

ultima analisi, risolvere senza l' aiuto della riga i due problemi 1) e 2), dove, ripeto, ogni retta s' intenda rappresentata da due suoi punti. Il principio, ora detto, da cui si può partire per procedere alla nostra dimostrazione, è quello su cui poggia il metodo di Mascheroni.

Nel § 2 di questo articolo io espongo quelle costruzioni che è necessario premettere alla risoluzione dei due problemi fondamentali suddetti, andando direttamente allo scopo, tralasciando cioè tutti quei problemi, i quali, ancorchè assai interessanti e affini con quelli esposti, non vengono però utilizzati nel seguente § 3, che è dedicato alla risoluzione dei problemi 1) e 2). Trovai tuttavia opportuno, per alcuni problemi, di indicare brevemente, accanto alle soluzioni del Mascheroni, quelle date dal Dubouis nella Nota citata, oppure da lui trovate più tardi e comunicatemi cortesemente in una lettera. Con questi due §§ lo scopo primo del mio articolo sarebbe raggiunto. Suppongasi difatti che si abbia da risolvere un qualunque problema di geometria elementare: si prenda una qualunque delle soluzioni che si conoscono, ottenuta mediante la riga ed il compasso, e la si applichi tale e quale; poichè la riga non si adopera se non per risolvere i problemi 1) e 2), ogni qualvolta si presenterà l' occasione di farne uso si potrà sempre sostituirla colle costruzioni del § 3: il problema proposto viene così risolto col solo compasso.

Che il metodo ora accennato complichi i procedimenti e le figure, si comprende, ed è chiaro che una costruzione, nella quale vi fosse da applicare parecchie volte i problemi 1) e 2), diventerebbe tutt' altro che comoda. Questo spiega perchè il Mascheroni, volendo rendere il suo metodo possibilmente pratico, non si sia limitato a risolvere quei due problemi fondamentali, ma abbia ricercato per parecchi altri delle nuove soluzioni, col solo compasso, che potessero sostituire, anche per

semplicità, quelle comunemente note, in cui si fa pure uso della riga. Il non far cenno, per parte mia, di alcuni di questi esempi, sarebbe stato un voler presentare l'opera del Mascheroni monca di una delle sue parti più interessanti; ed è per questo che dedicai i due §§ successivi ad esporre le soluzioni date dal Mascheroni per alcuni dei problemi elementari più comuni e più caratteristici. Ben inteso non tolsi che pochi degli esempi di cui abbonda la *Geometria del compasso*, trascurando quelli la cui soluzione è ovvia oppure è troppo complicata.

Il Mascheroni dedica l'ultimo capitolo del suo libro alla risoluzione, in via approssimata, di parecchi problemi di grado superiore al secondo e di problemi trascendenti, come la moltiplicazione e la suddivisione del cubo, la rettificazione della circonferenza, la quadratura del circolo, la cubatura della sfera, ecc. Su quest' ultimo soggetto non volli entrare in molti particolari, per non invadere un campo riserbato ad altri collaboratori; credetti bene tuttavia di mostrare nel § 6 come il Mascheroni ottenga la duplicazione del cubo e la rettificazione della circonferenza, usando dei metodi che, se sono da un lato raccomandabili per la loro speditezza, danno d' altra parte un' approssimazione più che sufficiente per la pratica.

Farò osservare ancora che quando si trattava di scegliere fra più soluzioni date dal Mascheroni per un medesimo problema, avevo cura di prendere sempre la più semplice; onde poi avere un criterio unico per giudicare della maggiore o minore semplicità di una costruzione, mi valsi del metodo esposto dal Lemoine nella sua « *Géométrographie* », che tien conto della semplicità effettiva di costruzione, non già di quella apparente che proviene dalla brevità del linguaggio, e che, se non risponde alla perfezione, è però l' unico che porga il mezzo di stabilire un confronto di quella natura.

Dopo aver indicato, nei primi sei §§, come il Mascheroni dimostri il teorema fondamentale della Geometria

del compasso, e come ottenga, per via nuova, la soluzione di varii problemi senza far uso della riga, vien naturale di far vedere in che modo a quel medesimo teorema si pervenga applicando il principio dell' inversione, secondo il concetto dell' Adler. I §§ 7 e 8 sono destinati precisamente all' esposizione succinta della dimostrazione dell'Adler, la quale, se non è così elementare come quella del Mascheroni, presenta però il vantaggio d' una maggiore brevità, e serve, d' altronde, a mettere sotto una nuova luce le costruzioni col solo compasso, in quanto che rivela il loro legame coi metodi della Geometria proiettiva.

L' Adler non fa, nella sua Nota, alcuna applicazione ai problemi elementari; onde però mostrare che quel metodo può condurre a costruzioni eleganti ed istruttive, accennai nel § 9, che chiude l' articolo, a pochi problemi notissimi che ricevono dal principio dei raggi reciproci soluzioni nuove e condotte con metodo uniforme. Del resto, ben si comprende come, piuttosto che fissare l' attenzione sui singoli problemi, convenga afferrare le linee generali del metodo a cui le loro soluzioni sono informate; gli esempi particolari addotti hanno più che altro lo scopo di offrire più abbondante materia al lavoro di astrazione dal quale deve emergere il vero spirito del metodo: compiuto che sia quel lavoro, non si opporrà più alcuna grave difficoltà a moltiplicare a proprio talento le applicazioni del metodo stesso.

§ 2. **Prime costruzioni.** — *Da un punto A condurre la parallela ad una retta BC.*

Basterà formare il parallelogramma $ABCD$, determinando il punto D come intersezione delle due circonferenze $A(BC)$ e $C(AB)$ [1]: la retta AD è parallela alla BC.

---

[1] Scrivo « circonf. $A(BC)$ » per « circonferenze di centro A e raggio eguale a BC »; questo modo abbreviativo verrà usato anche nel seguito.

Questa costruzione non è poi che una di quelle comunemente usate.

Raddoppiare, triplicare, ecc. un dato segmento OA.

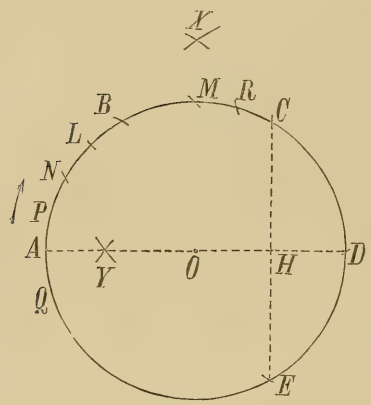


Fig. 1.

Con centro in uno degli estremi, ad es. in O, e con raggio OA si descriva una circonferenza (Fig. 1); indi si determini su questa i punti B, C, D in modo che sia

$$AB = BC = CD = OA:$$

il punto D sarà diametralmente opposto ad A, e quindi il segmento AD sarà doppio di OA.

Colla ripetizione di questa medesima costruzione si può triplicare il segmento OA, quadrupicarlo,... in generale moltiplicarlo per n (n intero).

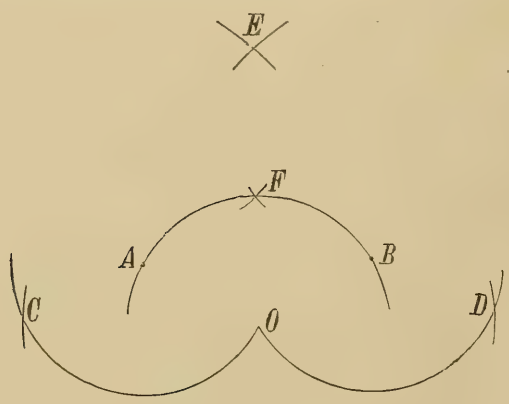


Fig. 2.

Costruire il simmetrico di un punto C rispetto ad una retta AB.

Le due circonferenze

$A(AC)$ e $B(BC)$

si tagliano ulteriormente nel punto richiesto.

Dividere un arco di circonferenza per metà.

Sia AB l'arco dato appartenente ad una circonferenza di centro O (Fig. 2). Mediante le circonferenze $A\,(OA)$, $B\,(OA)$ e $O\,(AB)$ determino i punti C e D per

modo d'avere i due parallelogrammi $ABOC$ e $ABDO$, eguali fra loro e colla stessa base AB; indi coi centri C e D e raggio $CB = DA$ descrivo due circonferenze di cui considero uno qualunque dei due punti d'intersezione, e sia E questo punto: chiamando allora F uno qualunque dei due punti d'incontro delle circonferenze $C(OE)$ e $D(OE)$, il punto F starà sulla circonferenza data, e dividerà per metà uno dei due archi AB.

Difatti per le costruzioni eseguite i punti C, O, D stanno in una medesima retta parallela alla AB. Inoltre poichè nel parallelogramma $ABOC$ la diagonale AO è uguale ai lati AC e BO, si avrà:

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= \overline{CO}^2 + \overline{BO}^2 + 2 \,.\, \overline{CO} \,.\, \text{proi} \,.\, OB \text{ su } OC \\ &= \overline{CO}^2 + \overline{AO}^2 + \overline{CO} \,.\, 2 \text{ proi} \,.\, \overline{OB} \text{ su } AB \\ &= \overline{AO}^2 + 2 \,.\, \overline{CO}^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Gli angoli EOC, EOD sono inoltre retti, e quindi

$$\overline{CE}^2 = \overline{CB}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OE}^2,$$

e poichè $\overline{OE} = \overline{CF}$, sarà:

$$\overline{CB}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{CF}^2; \tag{2}$$

dal confronto delle (1) e (2) si trae $\overline{CF}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{CO}^2$. Essendo poi l'angolo FOC evidentemente retto, avremo: $\overline{CF}^2 = \overline{CO}^3 + \overline{OF}^2$; da questa e dalla precedente si deduce: $OA = OF$, il che dice che il punto F sta sulla circonf. $O(OA)$. Di più se dagli angoli eguali FOC, FOD si tolgono risp. gli angoli pure eguali AOC, BOD rimane:

$$\widehat{FOA} = \widehat{FOB}.$$

Questo prova che il punto F divide per metà l'arco AFB.

Costruire il segmento quarto proporzionale rispetto a tre segmenti dati m, n, p.

Descriviamo le circonferenze $O(m)$ e $O(n)$ (Fig. 3), O essendo un punto qualunque del piano, e siano A, B due punti della prima tali che la corda AB sia eguale a p;

fatto centro successivamente in A e in B, con un medesimo raggio arbitrario si tagli poi la circonferenza $O(n)$ nei due punti $A'B'$: sarà $A'B'$ il segmento cercato.

Difatti i triangoli OAA', OBB', avendo i lati rispettivamente eguali, sono eguali, onde sarà $\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'}$; se da questi angoli si toglie poi (o si aggiunge, secondo i casi) l'angolo comune BOA', si avrà $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$. Ne segue che i triangoli AOB, $A'OB'$ sono simili, e fra i loro lati passa la proporzione:

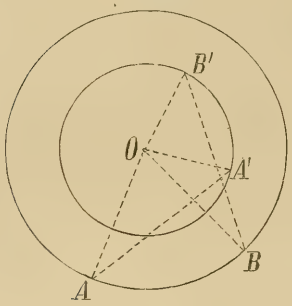


Fig. 3.

$$OA : OA' = AB : A'B';$$

ricordando che è

$$OA = m,\ OA' = n,\ AB = p,$$

si conchiude che $A'B'$ è il quarto proporzionale dopo m, n, p.

Quando fosse $p > 2m$, sarebbe impossibile segnare nel primo cerchio la corda $AB = p$; tuttavia si può ancora applicare la costruzione indicata, sostituendo ai segmenti m e n i loro doppi, e, se non basta, i loro tripli, ecc.; poichè si ha sempre, qualunque sia il numero k:

$$km : kn = m : n.$$

Lo stesso problema è risolto dal Dubouis nel modo seguente.

Con centro in un punto arbitrario O descriviamo una circonferenza di raggio m (Fig. 4), e su di essa prendiamo i punti M, N, P in modo che sia $MN = n$, $MP = p$; se diciamo Q il simmetrico di M rispetto alla retta NP, dai triangoli isosceli o simili OMN, PQM si trae:

$$OM : MN = PM : MQ,$$

ossia

$$m : n = p : MQ;$$

dunque MQ è il quarto proporzionale domandato.

Per l'applicabilità di questa costruzione si richiede che sia ad un tempo $n < 2m$, $p < 2m$; qualora queste condizioni non siano entrambe soddisfatte, basterà sostituire alla circonf. $O(m)$ un'altra circonf. $O(km)$, indicando con k un nnmero intero convenientemente scelto. Il segmento che si otterrà allora come quarto proporzionale sarà la k^{ma} parte di quello che noi cerchiamo, al quale si arriverà moltiplicando per k quello ottenuto.

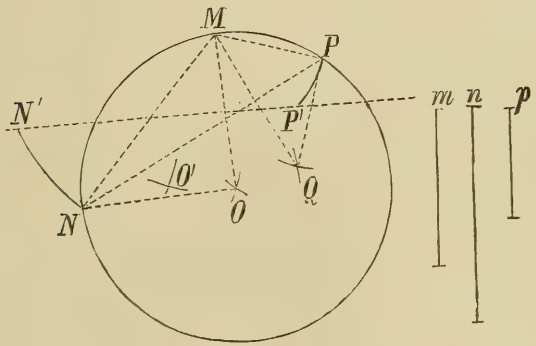


Fig. 4.

Dall'analisi fatta in questo problema risulta poi il teorema seguente: *Se MNP è un triangolo inscritto in un cerchio, e Q è il punto simmetrico di M rispetto al lato NP, il segmento MQ è quarto proporzionale rispetto al raggio del cerchio e ai lati rimanenti MN, MP.*

Il problema del quarto proporzionale offre, colle due costruzioni che se ne sono date, uno degli esempi più caratteristici di problemi elementari che ammettono una soluzione col solo compasso più semplice che non quelle note in cui si adopera pure la riga: è vero però che questa maggiore semplicità va perduta nel problema attuale quando non sono soddisfatte certe condizioni di diseguaglianza fra m, n, p, poichè allora vi è

da applicare (e forse più di una volta) anche il secondo problema di questo §.

§ 3. **I problemi fondamentali nel metodo di L. Mascheroni.** — *Trovare i punti comuni ad una circonferenza e ad una retta che non passi pel suo centro.*

Sia O il centro del cerchio e AB la retta data. Costruisco il punto P simmetrico di O rispetto alla retta AB; detti allora C e D i punti (supposti esistenti) comuni alla circonferenza ed alla retta AB, il quadrilatero $OCPD$ ha evidentemente i lati tutti eguali fra di loro. Per avere i punti C e D basterà dunque tagliare la circonferenza data colla $P(OC)$.

Trovare i punti comuni ad una circonferenza e ad una retta passante pel suo centro.

Se A è un punto della retta diverso dal centro O della circonferenza, si descriva con raggio arbitrario una circonferenza che abbia il centro in A e tagli la circonferenza data in due punti B, C; dividendo per metà i due archi determinati sulla data circonferenza dai punti B e C, i punti di divisione saranno i punti domandati.

Determinare il punto comune a due rette.

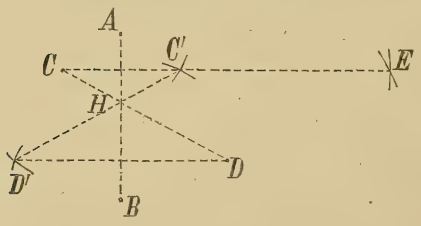


Fig. 5.

Siano AB, CD le due rette date (Fig. 5). Costruiamo i punti C e D' simmetrici di C' e D rispetto alla retta AB, indi determiniamo sulla CC' il punto E in modo che il quadrilatero $C'D'DE$ sia un parallelogramma. È chiaro che per il punto H comune alle AB e CD passa anche la $C'D'$; ora si ha la seguente proporzione:

$$CE : CC' = CD : CH,$$

nella quale i tre primi termini sono segmenti di lunghezza nota: noi possiamo dunque coll' ultima costruzione del § precedente, determinare la lunghezza del segmento CH, e quindi la posizione del punto H, che sarà uno dei punti comuni alle due circonferenze $C(CH)$ e $C'(CH)$.

La costruzione ora indicata cessa di applicarsi quando le rette AB e CD sono perpendicolari, come è facile verificare. Per risolvere il problema anche in questo caso speciale cominciamo col premettere la risoluzione di quest' altro, che è un' applicazione dei precedenti.

Trovare il punto medio di un segmento AB.

Segnato il punto C simmetrico di B rispetto ad A, si costruisca il segmento terzo proporzionale rispetto ad AC e AB; indicando con m la sua lunghezza, si descriva la circonf. $A\ (m)$, e si determini il suo punto, situato fra A e B, che sta sulla retta AB: quello sarà il punto medio del segmento AB.

Possiamo ora *trovare il punto comune a due rette AB e CD perpendicolari fra di loro.*

Si cerchi il punto C' simmetrico di C rispetto alla retta AB; il punto domandato non è altro che il punto medio del segmento CC'.

Nella costruzione non s' è fatto uso del punto D: la cosa è naturale, perchè la CD è già individuata dalle condizioni di passare pel punto C e di essere perpendicolare ad AB. Il problema si poteva anche enunciare così: *Determinare il piede della perpendicolare condotta da un punto ad una retta.*

Il punto comune a due rette si costruisce pure, secondo il Dubouis, col procedimento che segue:

Cominciamo col *determinare il centro del cerchio passante per tre punti M, N' P' non allineati.*

Chiamando O (Fig. 4) il simmetrico di M rispetto alla retta $N'P'$, e indicando con r il raggio del cerchio

(M, N', P'), dal teorema enunciato alla fine del § precedente si deduce la proporzione

$$r : MN' = MP' : MO,$$

ovvero

$$MO : MN' = MP' : r. \qquad (A)$$

Il segmento r si potrà dunque avere, colla costruzione data dal Dubois pel quarto proporzionale, descrivendo la circonferenza $O(OM)$ e tagliandola in N, P colle circonferenze $M(MN')$ e $M(MP')$, indi costruendo il punto Q simmetrico di M rispetto alla retta NP: sarà $MQ = r$. Difatti abbiamo $MO : MN = MP : MQ$, e poichè è $MN = MN'$, $MP = MP'$, segue, confrontando colla (A): $MQ = r$. Il centro del cerchio $(M, N' P')$ sarà allora uno dei punti comuni alle circonferenze $M(MQ)$ e $N'(MQ)$.

Si voglia ora *trovare il punto d' incontro di due rette* AB, CD. Preso nel piano un punto arbitrario M, si costruiscano i suoi simmetrici M' e M'' rispetto alle rette AB, CD: il punto comune a queste ultime non è altro che il centro che passa per i punti M, M', M''.

Questa costruzione del punto comune a due rette presenta su quella del Mascheroni il vantaggio teorico che si applica anche quando le rette date sono perpendicolari. Si comprende però come praticamente sia da preferirsi, in quest' ultimo caso, la costruzione già esposta, tanto più se la determinazione del punto medio di un segmento la si ottiene col metodo che sarà indicato al § 4.

§ 4. **Risoluzione di alcuni problemi sui segmenti e sugli angoli.** — Si è già indicata una costruzione del punto medio di un segmento, che si deduce come conseguenza di problemi risolti in precedenza; essa non è però la più breve; e se ciò malgrado le fu data la preferenza, questo fu fatto unicamente per ridurre al minimo possibile il numero delle costruzioni preliminari. In

pratica sarà però da preferirsi la seguente, che sta assolutamente a sè.

Nuova costruzione del punto medio di un segmento.

Sia AB il segmento dato (Fig. 6). Descriviamo, col centro in A, la semicirconferenza $BCDE$, e poi la circonferenza $B(BE)$; su questa determiniamo i punti P, Q in modo che sia $EP = EQ = EC$, quindi descriviamo le circonf. $P(EC)$ e $Q(EC)$. Esse si tagliano in due punti della retta BE; uno di questi, M, dico che è il punto medio fra A e B.

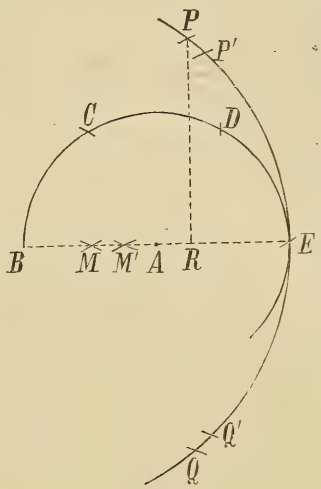


Fig. 6.

Infatti dal triangolo BPE (isoscele e quindi coll' angolo BEP acuto) si ha:

$$\overline{BP}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{PE}^2 - 2.\ \overline{BE}\ \text{proi.}\ \overline{PE}\ \text{su}\ QE,$$

ossia, essendo $\overline{BP} = \overline{BE}$,

$$\overline{PE}^2 = \overline{BE}\ .\ 2\ \text{proi.}\ \overline{PE}\ \text{su}\ BE.$$

Ricordando ora che è per costruzione $\overline{PE} = \overline{PM}$, si ha:

$$2\ .\ \text{proi.}\ \overline{PE}\ \text{su}\ BE = \overline{EM},$$

onde $$\overline{PE}^2 = \overline{BE}\ .\ \overline{EM} = 2\ .\ \overline{AB}\ .\ \overline{EM};$$

ma $\overline{PE} = \overline{EC} = \overline{AB}\sqrt{3}$: allora l' ultima eguaglianza diventa

$$3\ .\ \overline{AB}^2 = 2\ .\ \overline{AB}\ .\ \overline{EM},$$

da cui si deduce

$$3\ .\ \overline{AB} = 2\ .\ \overline{EM},$$

e togliendo $2\ .\ \overline{AB}$ da ambo i membri: $\overline{AB} = 2\ .\ \overline{AM}$, il che dice che M è il punto medio fra A e B.

Valendoci della costruzione ora fatta possiamo procedere a trovare il punto medio M' del segmento AM, e poi il punto medio M'' del segmento AM'; e così via. Per avere il punto M' basterà segnare sulla circonf. $B\,(BE)$ i punti P' e Q' tali che sia $EP' = EQ' = AP$, quindi, fatto centro successivamente in P' e Q', descrivere due circonferenze col medesimo raggio AP: esse determinano il punto M', che è il cercato. Difatti è chiaro anzitutto che il punto M' sta sulla retta BE. Inoltre se diciamo R il piede della perpendicolare condotta da P sulla BE, si hanno le seguenti relazioni:

$$\overline{BP}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AP}^2 + 2 \,.\, \overline{AB} \,.\, \overline{AR}$$
$$\overline{PE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AP}^2 - 2 \,.\, \overline{AE} \,.\, \overline{AR},$$

donde sommando e osservando che è $AB = AE$:

$$\overline{BP}^2 + \overline{PE}^2 = 2 \,.\, \overline{AB}^2 + 2 \,.\, \overline{AP}^2.$$

Ora

$$\overline{BP} = \overline{BE} = 2 \,.\, \overline{AB}, \overline{PE} = \overline{CE} = \overline{AB} \,.\, \sqrt{3}\,;$$

sostituendo nella precedente eguaglianza si ha:

$$7 \,.\, \overline{AB}^2 = 2 \,.\, \overline{AB}^2 + 2 \,.\, \overline{AP}^2,$$

ossia

$$\frac{5}{2}\,\overline{AB}^2 = \overline{AP}^2 = \overline{EP'}^2.$$

Dai triangoli isosceli e simili $BP'E$, $P'M'E$ si ha poi: $\overline{EP'}^2 = \overline{BE} \,.\, \overline{M'E}$, quindi $\frac{5}{2}\,\overline{AB}^2 = 2 \,.\, \overline{AB} \,.\, \overline{M'E}$, donde $\frac{5}{4}\,\overline{AB} = \overline{M'E}$, e togliendo $\overline{AB}$ da ambo i membri: $\frac{1}{4}\,\overline{AB} = \overline{AM'}$. Dunque M' è il punto medio fra A e M.

Il punto M'' medio fra A e M' si otterrebbe prendendo sulla circonf. $B\,(BE)$ i punti P'' e Q'' per cui si ha $EP'' = EQ'' = AP'$, e poi descrivendo le circonf. $P''\,(AP')$ e $Q''\,(AP')$: la dimostrazione si conduce in modo analogo alla precedente.

Il terzo proporzionale rispetto a due segmenti m e n si costruisce secondo il metodo generale che serve a trovare il quarto proporzionale rispetto a tre segmenti; quando però è $n < 2\,m$, si può utilmente sostituire a quella soluzione quest' altra, che è assai notevole per la sua eleganza. Siano (Fig. 7) A e B gli estremi di un segmento eguale a m; descrivo la circonf. $A\,(AB)$ e $B\,(n)$, le quali si taglieranno in due punti C, D: se C' è il simmetrico di C rispetto a B, sarà $C'D$ il terzo proporzionale rispetto a m e n.

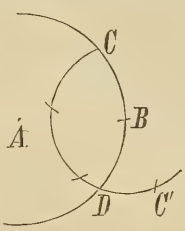


Fig. 7.

Difatti l' angolo BDB' essendo retto, le rette AB e DB' sono parallele, onde gli angoli ABD, BDC' sono eguali; allora i due triangoli isosceli ADB, BDC' sono simili, e fra i loro lati vi ha la proporzione

$$AB : BD = BD : DC',$$

cioè DC' è terzo proporzionale rispetto a m e n.

La costruzione di un segmento eguale alla n^{ma} *parte di un segmento dato* si eseguisce in modo generale formando un segmento eguale a n volte il dato, indi cercando il terzo proporzionale rispetto al nuovo segmento ed al primo. Praticamente si presta assai bene la costruzione del terzo proporzionale data or ora.

Supponiamo, ad es., che si voglia costruire la terza parte di un segmento AB. Cominciamo (Fig. 8) a determinare il segmento AD triplo di AB, poi costruiamo il segmento $L'M$ terzo proporzionale rispetto a AD e ad AB: sarà $L'M$ eguale alla terza parte di AB. Se poi si trova il punto N in

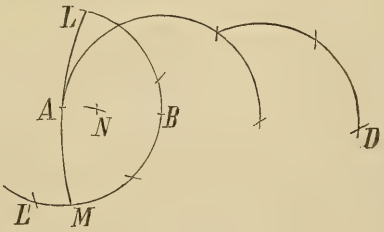


Fig. 8.

cui si tagliano le circonf. $M\ (AB)$ e $A\ (L'M)$, sarà N uno dei punti di divisione del segmento AB in tre parti eguali.

Un angolo possiamo imaginarlo dato mediante il vertice e due punti, ciascuno dei quali insieme col vertice individui un lato. Sono ovvie allora le soluzioni, col solo compasso, dei problemi fondamentali sugli angoli.

Raddoppiare, triplicare, ecc. l' angolo BAC.

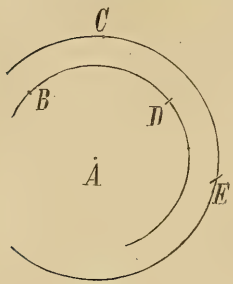


Fig. 9.

Si descriva (Fig. 9) la circonf. $A(AB)$; questa è tagliata dalla $C(CA)$ in un punto D, e l'angolo BAD è doppio del dato. Descrivendo poi la circonf. $A\ (AC)$ e tagliandola in E colla $D\ (DC)$, si ha l' angolo BAE triplo di BAC. Ecc.

Costruire la bisettrice dell' angolo BAC.

Si descriva la circonf. $A\,(AB)$ e si determini la sua intersezione D col lato AC; coi centri B e D e con un medesimo raggio qualunque si descrivano due circonferenze che si taglino in un punto M. Sarà AM la bisettrice domandata.

Sopra una retta A'B' e col vertice in A' costruire un angolo eguale ad un angolo dato BAC.

Si cerchi il quarto proporzionale dopo i segmenti AB, $A'B'$, AC, e con questo segmento come raggio si descriva una circonferenza col centro in A'; similmente si segni una seconda circonferenza di centro B' e raggio eguale al quarto proporzionale dopo AB, $A'B'$ BC. Le due circonferenze si taglieranno in due punti situati da bande opposte rispetto alla retta $A'B'$: detto C' uno qualunque di essi, sarà l' angolo $B'A'C'$ eguale al dato BAC.

Dividere un segmento in media ed estrema ragione.

Sia OA il segmento dato (Fig. 1), e si voglia determinare sulla retta OA il punto Y tale che sia $\overline{OY}^2 = \overline{OA}.\ \overline{AY}$.

Descriviamo la circonf. O (OA), e determiniamo su di essa i punti B, C, D, E tali che sia $AB = BC = DE = OA$; si determini poi il punto X intersezione delle circonferenze $A(AC)$ e $D(AC)$, indi il punto Y intersezione delle $C(OX)$ e $E(OX)$. Il punto Y sta evidentemente sulla retta OA. Volendo dimostrare che OY è la parte aurea di OA, cominciamo coll' osservare che nel triangolo rettangolo AOX si ha, supposto per semplicità $OA = 1$: $AX = AC\sqrt{3}$, onde $OX = \sqrt{2}$. Immaginiamo ora le rette AOD, CY, CE, e si chiami H il punto comune a CE e ad AD; abbiamo:

$$CY = OX = \sqrt{2}, \quad CH = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

onde dal triangolo rettangolo

$$CHY : HY = \frac{\sqrt{5}}{2};$$

allora sarà

$$OY = HY - OH = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

cioè OY è eguale alla parte aurea del raggio, supposto eguale ad 1.

Osservazione. — Dalla stessa Fig. 1, abbiamo ancora:

$$DY = DO + OY = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$DY.\,OY = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1,$$

onde

$$\overline{DY}.\,\overline{OY} = \overline{OD}^2,$$

cioè OD è la parte aurea di DY. Adunque la medesima costruzione serve pure per risolvere il problema:

Costruire un segmento, conoscendone la parte aurea.

§ 5. **Divisione della circonferenza in 3, 4, 5, 10 parti eguali.** — Coll' analisi fatta nel problema precedente ci siamo procurati tutti gli elementi che permettono di inscrivere, mediante il solo compasso, in una circonferenza tutti i poligoni regolari la cui inscrizione era già stata eseguita dagli antichi geometri facendo uso anche della riga. È questo uno dei più bei risultati ottenuti dal Mascheroni; insieme coll' inscrizione del poligono regolare di 17 lati compiuta dal Gérard (di cui feci cenno al principio dell' articolo) esso costituisce uno dei capitoli più eleganti della Geometria del compasso. Convien notare che la divisione della circonferenza in parti eguali fu appunto il primo argomento che il Mascheroni affrontò, e l' esservi bene riuscito gli diede animo a stabilire in modo generale la teoria delle costruzioni col solo compasso.

a) L' inscrizione dell' *esagono,* e quindi del *triangolo,* regolare fu ottenuta nel precedente problema mediante la costruzione dei punti A, B, C, D, (Fig. 1).

b) Tagliando la circonf. $O(OA)$ colla $A(OX)$ nel punto M, sarà AM il lato del *quadrato* inscritto, poichè è $AM = OX$, e fu trovato $OX = \sqrt{2}$.

c) Il lato dell' *ottagono* si ottiene dividendo per metà l' arco AM; per questo non occorre però fare uso della costruzione data al § 2: se si taglia difatti la $O(OA)$ colla $X(OA)$ nel punto L, nel triangolo OLX si ha:

$$OL = LX = 1\,,\ OX = \sqrt{2}\,.$$

Quindi l' angolo OLX è retto, onde l' angolo LOX vale mezzo retto, dal che segue che L è il punto medio dell' arco AM, e il segmento AL è il lato dell' ottagono regolare inscritto.

d) Il lato del *decagono* regolare è eguale ad OY, perchè OY è la parte aurea del raggio. Si ottiene anche in tal modo la divisione della circonferenza in cinque

parti eguali; il lato del *pentagono* regolare non sarebbe poi altro che MY, perchè ipotenusa del triangolo rettangolo MOY, i cui cateti sono il raggio e la sua parte aurea.

Si può osservare, per l'eleganza delle costruzioni, che i problemi, risolti in questo §, richiedono l'uso di tre sole aperture di compasso, eguali risp. a $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$.

§ 6. **Problemi risolti per approssimazione: Rettificazione della circonferenza, duplicazione del cubo.** — Sia O il centro d'una circonferenza (Fig. 1), sulla quale si contino gli archi da un suo punto A e positivamente nel senso indicato dalla freccia. Sia P un punto qualunque della circonferenza, e per fissare le idee supponiamo l'arco AP appartenente all'uno dei due primi quadranti; diciamo poi Q il simmetrico di P rispetto al diametro OA. Costruito il punto X come nell'ultimo problema del § 4, dal triangolo OPX si ha:

$$\begin{aligned} \overline{PX}^2 &= \overline{OP}^2 + \overline{OX}^2 - \overline{OX} \,.\, 2 \text{ proi. } \overline{OP} \text{ su } OX \\ &= \overline{OA}^2 + \overline{OX}^2 - \overline{OX} \,.\, \overline{PQ} \\ &= \overline{AX}^2 - \overline{OX} \,.\, \overline{PQ} \,. \end{aligned}$$

Ora posto $OA = 1$, arco $AP = \alpha$ (in gradi), si ha:

$$AX = \sqrt{3},\ OX = \sqrt{2},\ PQ = 2 \text{ sen } \alpha,$$

e indicando con b la lunghezza del segmento PX, l'ultima formola si scrive:

$$b^2 = 3 - 2\sqrt{2} \text{ sen } \alpha \,. \qquad (1).$$

Questa formola vale qualunque sia il punto P nei due primi quadranti, e vale anche negli altri due col combiamento del segno —, che figura nel secondo membro, in +. In essa inoltre b può sempre essere considerata come una corda del dato cerchio, salvo per posizioni del punto P nel terzo e quarto quadrante, alle quali corrisponda una distanza $PX > 2$.

Supposto $\alpha < 180°$ (onde $b < 2$), possiamo dare alla (1) una nuova forma. Chiamando β l'arco del cerchio $O(OA)$ di cui b è la corda, si ha:

$$b = 2 \text{ sen } \frac{\beta}{2},$$

e quindi

$$\frac{b^2}{4} = \text{sen}^2 \frac{\beta}{2} = \frac{1 - \cos \beta}{2} \tag{2}$$

D'altronde dalla (1) abbiamo

$$\frac{b^2}{4} = \frac{3}{4} - \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ sen } \alpha = \frac{3}{4} - \text{sen } \alpha \cos 45°; \tag{3}$$

dal confronto delle (2) e (3) si deduce

$$\cos \beta = 2 \text{ sen } \alpha \cos 45° - \frac{1}{2}$$

$$= \text{sen } (\alpha + 45°) + \text{sen } (\alpha - 45°) - \text{sen } 30°,$$

che si può auche scrivere:

$$\cos \beta = \cos (45° - \alpha) - \text{sen } (45° - \alpha) - \text{sen } 30°. \tag{4}$$

È questa la formola che volevamo ottenere, e che ci servirà nella risoluzione dei due problemi seguenti.

Rettificazione approssimata della circonferenza.

Se $O(OA)$ è la circonferenza da rettificare, si costruisca il punto X come nella Fig. 1, indi si descriva la $B(BX)$ e si chiami R il suo punto d'incontro colla $O(OA)$ situato nell'arco BCD. L'errore che si commette prendendo il segmento AR come misura del quarto di circonferenza è di circa 0,0004 in eccesso.

Se difatti nell'equazione (4) si fa $\alpha = \widehat{BC} = 60°$, si ha per β il valore $\beta = 43°33' \frac{286}{2005}$; ora β è l'arco di cui la corda è BX, ossia BR: ne viene che l'arco ABR sarà

di $103°33'\frac{286}{2005}$. Il doppio del seno della sua metà ci dà la lunghezza della sua corda; ora abbiamo:

$$\frac{\text{arco } ABR}{2} = 51°46'\frac{1145}{2005},$$

ed il seno di quest' arco è 0,7855998; dunque la corda AR sarà misurata da 1,5711996. D' altronde la quarta parte della circonferenza ha per misura 1,5707963, numero che differisce in meno per circa 0,0004 a quello trovato per la corda AR.

Duplicazione approssimata del cubo.

Sia $OA = 1$ lo spigolo di un cubo (Fig. 1), e si voglia determinare lo spigolo di un altro cubo doppio del primo. Descritta la circonf. $O(OA)$, costruito il punto X come nei problemi precedenti, ed il punto M, vertice del quadrato inscritto di cui un altro vertice è A (§ 5, *b*), si descriva la circonf. $M(MO)$; questa taglierà l'arco AB in un punto N, la cui distanza da X rappresenta lo spigolo del cubo doppio del dato con un errore in difetto che non raggiunge 0,0007.

Difatti l' arco AN, che è la dodicesima parte della circonferenza, è di 30°; sostituendolo nella formola (4) in luogo dell' arco α, si ha per l' arco β, la cui corda è NX: $\beta = 78°2'\frac{2358}{2846}$, ed in conseguenza

$$NX = 2 \text{ sen } 39°1'\frac{1179}{2846} = 1{,}2592800.$$

Si ha d' altra parte: $\sqrt[3]{2} = 1{,}2599209$, e questo numero supera il valore trovato per NX di circa 0,00064.

§ 7. **Le trasformazioni per raggi vettori reciproci e le costruzioni col solo compasso: problemi fondamentali.** — La dimostrazione, che dà il sig. Adler, del teorema fondamentale della Geometria del compasso,

richiede che si premetta la risoluzione, con sole circonferenze, di alcuni problemi, che ora indicheremo. Dei problemi già risolti da Mascheroni non ci occorrono che il secondo e il terzo del § 2; dopo ciò possiamo venire ai seguenti.

Dato in un piano un cerchio k di centro O e raggio r, costruire, col solo compasso, di un punto M l'inverso rispetto a k; cioè determinare sulla retta OM il punto M' definito dalla condizione: $OM \,.\, OM' = r^2$.

a) Suppongasi in primo luogo $OM > \frac{r}{2}$. La circonf. $M(MO)$ taglia k in due punti A, B (Fig. 10); le circonf. $A(r)$ e $B(r)$ si tagliano sulla retta OM nel punto domandato M'. Difatti chiamando X il punto comune alle due ultime circonferenze, e situato con M dalla stessa banda rispetto ad O, dai due triangoli simili MOA, AOX si ha:

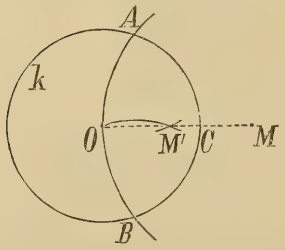


Fig.. 10.

$$OM \,.\, OX = \overline{OA}^2 = r^2.$$

Questo dice che X coincide col punto M'.

b) Sia ora $OM < \frac{r}{2}$. Poichè la cinconf. $M(MO)$ non taglia più, come in *a*), il cerchio k, si costruisca il segmento $ON = n\,OM$, indicando con n un numero abbastanza grande perchè sia $ON > \frac{r}{2}$; si potrà allora segnare, colla costruzione precedente, il punto N' inverso di N: infine il punto M' sarà definito dalla relazione: $OM' = n\,ON'$.

In sostanza noi possiamo, mediante il solo compasso, costruire l'inverso rispetto a k di un punto *qualunque* del piano.

Osservazione. — Se il punto M è tale che si abbia $OM = \mu r$ (ove μ è un intero qualunque), si deduce $OM' = \frac{r}{\mu}$. Si ha così la seguente costruzione della μ^{ma} parte di un segmento: essendo OC il segmento dato (Fig. 10), si costruisca sulla retta OC il punto M per modo che sia $OM = \mu \,.\, \overline{OC}$; chiamando M' l'inverso di M rispetto alla circonf. $O(OC)$, sarà

$$OM' = \frac{1}{\mu} \,.\, \overline{OC}.$$

Se si confronta questa costruzione con quella data per il medesimo problema al § 4, si vede che l'ultima esposta non è che la prima alquanto semplificata e resa più simmetrica, sicchè in pratica è più conveniente. Più in generale, la costruzione ora indicata risolve il problema: « Costruire il terzo proporzionale dopo due segmenti dati »; ed allora richiama subito alla mente la costruzione corrispondente del § 4, della quale è un po' più semplice. Del resto, per quel che riguarda la divisione di un segmento in parti uguali, la presente costruzione si trova già esposta nel libro di Mascheroni per il caso di $\mu = 2$; non vi si fa però cenno, neanche lontanamente, del principio dei raggi reciproci.

Ricorderemo le seguenti proprietà della trasformazione per raggi reciproci.

Una retta *non* passante per O è trasformata in un cerchio che *passa* per O, ed il cui diametro condotto per O è perpendicolare alla retta. E viceversa.

Un cerchio *non* passante per O è trasformato in un cerchio che corrisponde al primo in un'omotetia di centro O.

Una retta *passante* per O è trasformata in sè stessa.

Vogliasi ora *nell' inversione rispetto a k costruire il centro della circonferenza corrispondente alla retta data RS non passante per O.*

Sia M (Fig. 11) il simmetrico di O rispetto alla retta RS, e sia M' l'inverso di M rispetto a k; se allora diciamo H il punto comune alle rette OM e RS, e H' il suo inverso, sarà OH' un diametro del cerchio corrispondente alla retta RS, onde il cerchio stesso avrà per centro il punto medio fra O e H'. Ma poichè è

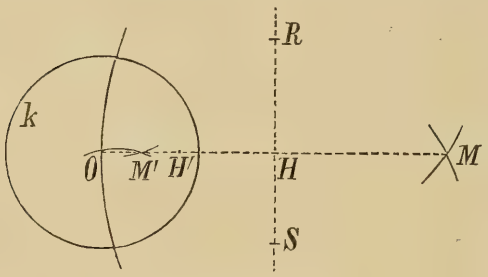


Fig. 11.

$$OM = 2\,\overline{OH},$$

sarà di conseguenza $OH' = 2 \,.\, OM'$; dunque M' è il punto medio del segmento OH', e quindi è il centro domandato.

Nell' inversione rispetto a k costruire il centro della circonf. γ' corrispondente alla data γ non passante per O.

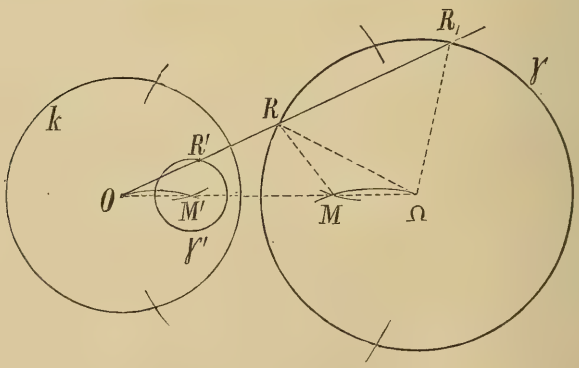


Fig. 12.

Se M è l'inverso di O rispetto a γ, e M' è l'inverso di M rispetto a k, sarà M' il centro domandato. Difatti: supposte costruite (Fig. 12) le circonf. γ e γ', diciamo Ω e M' i loro centri rispettivi, e costruiamo il punto M

inverso di M' rispetto a k. Da O tiriamo una retta che incontri γ in due punti R e R_1, e si chiami R' il punto in cui essa incontra γ' e che corrisponde a R nell'inversione rispetto a k; vuol dire allora che R' corrisponde a R_1 nell'omotetia di centro O nella quale γ' corrisponde a γ. Avremo le seguenti relazioni:

$$\frac{OR_1}{OR'} = \frac{O\Omega}{OM} \text{ (per l'omotetia anzidetta)}, \qquad (1)$$

e

$$OR \,.\, OR' = OM \,.\, OM' \text{ (per l'inversione rispetto a } k\text{)},$$

ossia

$$\frac{OR}{OM} = \frac{OM'}{OR'} \qquad (2).$$

Dalle (1) e (2) segue:

$$\frac{OR}{OM} = \frac{O\Omega}{OR_1},$$

la quale mostra che i due triangoli ORM, $O\Omega R_1$, aventi l'angolo in O comune, sono simili, e quindi:

$$\widehat{OR_1\Omega} = \widehat{OMR}, \quad \widehat{O\Omega R_1} = \widehat{ORM}.$$

Dall'eguaglianza fra queste due coppie di angoli e dalla $\widehat{\Omega RR_1} = \widehat{\Omega R_1 R}$ seguono poi queste altre eguaglianze:

$$\widehat{OR\Omega} = \widehat{RM\Omega}, \quad \widehat{RO\Omega} = \widehat{MR\Omega};$$

ma allora i due triangoli $OR\Omega$, $RM\Omega$ sono equiangoli e quindi simili e fra i loro lati passa la relazione

$$\frac{\Omega O}{\Omega R} = \frac{\Omega R}{\Omega M},$$

ossia

$$\Omega O \,.\, \Omega M = \Omega R^2,$$

la quale prova che i punti O ed M sono inversi rispetto

al cerchio γ. Questo dimostra l'esattezza della costruzione indicata pel centro di γ' [1].

Osservazione. — La circonferenza corrispondente di una retta nell'inversione si può senz'altro descrivere quando se ne sia costruito il centro, poichè si sa inoltre che essa deve passare per O. Al contrario la conoscenza del centro non basterà, in generale, per poter descrivere la circonf. γ' trasformata di un'altra circonf. γ, ma bisognerà ancora determinare l'inverso di un punto qualunque di γ; quest'ultima operazione diventa inutile nel solo caso in cui γ tagli il cerchio fondamentale della trasformazione, poichè i punti di questo corrispondono a sè stessi.

§ 8. **Dimostrazione, mediante l'inversione, della risolubilità dei problemi elementari col solo compasso.** — Si abbia da risolvere nel piano un problema P, nel quale non intervengano altre linee all'infuori di rette e di circonferenze, e si chiami F la figura che risulta dal considerare tutti i punti e tutte le linee che compaiono nel problema, anche se vi figurano soltanto come elementi ausiliari di costruzione. Si descriva un cerchio k il cui centro O non stia su nessuna di quelle linee, e si costruisca la figura F' inversa di F rispetto a k: per le proprietà poco sopra notate dell'inversione, la F' sarà composta unicamente di cerchi, i quali si potranno ottenere, col solo compasso, dalle linee di F mediante le eleganti costruzioni del § 7. Il problema P, consistente nel tracciare un certo numero di rette e di circonferenze, viene allora trasformato in un altro problema P', la cui risoluzione importa soltanto la costruzione di circon-

---

(1) La dimostrazione che l'Adler dà per questa costruzione non è quella da noi esposta: essa é molto più breve, ma cade in difetto in tutti quei casi in cui da O non si possono tirare le tangenti $a\gamma$ e $a\gamma'$; la nostra, se è meno semplice, ha però il vantaggio di esser valida in ogni caso.

ferenze. I punti, che costituiscono la risoluzione del problema P', non sono altro che gli inversi, rispetto a k, dei punti che danno la soluzione del problema P; da quelli adunque si può passare a questi mediante la solita inversione. E poichè tutte queste trasformazioni non richiedono l'uso di altri strumenti all'infuori del compasso, si conclude che *ogni problema, risolubile con riga e compasso, si può risolvere soltanto con quest'ultimo.*

§ 9. **Cenno sull'applicazione dell'inversione alla risoluzione di alcuni problemi elementari.** — Circa l'applicazione sistematica del principio dell'inversione alla risoluzione, col solo compasso, dei problemi elementari, si presenta la stessa osservazione che fu fatta fin dal principio riguardo al metodo di Mascheroni; tanto l'uno, cioè, quanto l'altro metodo applicati senza ulteriori avvertenze ad un problema qualsiasi, ne complicano, in generale, la risoluzione grafica. Ma allo stesso modo con cui uno studio più minuto del metodo di Mascheroni ci ha mostrato (v. §§ 4, 5, 6) come in parecchie questioni esso si giovi di artifizi speciali i quali lo rendono preferibile agli altri metodi più noti, così è ovvio pensare che un fatto analogo si verifichi in ordine al metodo dell'Adler. Per quanto non vi sia dubbio sull'utilità di una ricerca completa delle varie categorie di problemi a cui l'inversione si applica con vantaggio, pure non intendo qui di intraprendere questo studio; dirò soltanto che sono di due specie i riguardi che bisogna avere nell'applicazione del metodo: utilizzare, in primo luogo, per quanto è possibile, le proprietà dell'inversione, e scegliere ciascuna volta con cura il cerchio fondamentale della trasformazione.

Per fare un esempio, supponiamo che si debba risolvere questo problema, di cui già si diede una soluzione elementare al § 3.

Costruire il centro del cerchio passante per tre punti A, B, C non allineati.

Si potrà procedere nel modo seguente. Descrivo la circonf. $k \equiv A(AB)$, e nell' inversione rispetto ad essa costruisco il punto C' corrispondente di C: la retta BC' è evidentemente la trasformata del cerchio (A, B, C) nell' inversione medesima. Se allora cerco il simmetrico M' di A rispettivamente alla retta BC', e di esso l' inverso M rispetto a k, avrò in M il centro richiesto.

Questa costruzione, tenendo conto che si compie col solo compasso, è abbastanza semplice e non manca di eleganza; ed è mediante una scelta appropriata del cerchio k che ad essa si pervenne.

Esiste poi tutta una classe di problemi per i quali il metodo dell' inversione sembra specialmente indicato: sono le costruzioni da eseguirsi entro il foglio su elementi inaccessibili. È chiaro difatti che, trasformando con una conveniente inversione la figura quale ci è data, si potrà sempre, praticamente, agli elementi, che cadono fuori del foglio, sostituirne altri contenuti nei limiti del disegno; a questo punto la soluzione completa della questione diventa ovvia, se pure non è addirittura ottenuta.

Mostriamo su un problema speciale, del quale già si conoscono innumerevoli soluzioni, come si attui il concetto ora espresso. Si voglia *individuare la retta che congiunge un punto P col punto Q inaccessibile comune a due rette date AB, CD.* Descritta una circonferenza k di centro P, si costruiscano le circonferenze che corrispondono alle due rette date nell' inversione rispetto a k; quelle due circonferenze passano entrambe per P, e si tagliano perciò in un secondo punto, il quale non sarà altro se non il punto Q' inverso di Q. Siccome i punti P, Q, Q' sono allineati, la retta che si domanda è la PQ'.

Se nel problema medesimo si sostituisse, alle due rette che individuano il punto Q, due circonferenze, si potrebbe

ancora eseguire una costruzione analoga: solo vi sarebbe da osservare, per ragioni di semplificazione, che è conveniente, in questo caso, descrivere il cerchio k in modo che tagli entrambe le circonferenze date; e ciò in base alla osservazione con cui finisce il § 7.

Farò ancora un esempio. Si vuole *descrivere la circonferenza il cui centro è un punto dato O, e che passa per un punto P, inaccessibile, comune a due circonf. α e β di centri A e B risp.* Supponiamo dapprima che si abbiano sul foglio i punti A e B ed il punto P_1 in cui le circonf. α e β si tagliano oltre che in P. In questo caso non è neppur necessario ricorrere all' inversione, poichè, se diciamo O_1 il simmetrico di O rispetto alla retta AB, sarà $OP = O_1P_1$, e quindi la circonferenza domandata è la $O(O_1P_1)$. Si vede, anzi, che si può fare a meno di uno dei due punti A e B; giacchè se si ha nel disegno, ad es., il solo punto B, una circonferenza qualunque di centro B taglia la α in due punti R, S simmetrici rispetto alla retta AB, e quindi due circonferenze qualunque di centri R e S si tagliano in due punti della retta AB: sicchè possiamo, anche in assenza di A, trovare altri punti della retta AB.

Se poi son contenuti nel disegno i punti A e B, ma non P_1, il problema si risolve comodamente mediante l' inversione. Difatti le circonf. α' e β', inverse di α e β rispetto ad un cerchio k di centro O, si tagliano in due punti P' e P'_1, inversi di P e P_1 risp.; allora la $O(OP')$ sarà l' inversa della circonferenza domandata, onde prendendo su di essa un punto M' e cercandone l' inverso M (avendo cura di scegliere M' in modo che M non cada fuori del foglio), la circonferenza che si richiede sarà la $O(OM)$.

Anche qui si otterrà qualche risparmio di costruzione descrivendo la circonferenza k in maniera che tagli tanto α quanto β.

Lo stesso problema, sostituendo la circonf. α e β con due rette, si risolve pure facilmente coll' inversione.

ARTICOLO NONO

« Sulla risoluzione dei problemi geometrici cogli istrumenti elementari: contributo della Geometria proiettiva » di Amedeo Giacomini a Pisa.

Per risolvere i problemi costruttivi determinati, nella geometria elementare, si sogliono adoperare la *riga*, il *compasso*, la *riga a due orli* paralleli, la *squadra* e la *falsa squadra*.

Senza occuparci del compasso (il quale forma argomento di altro lavoro, art. 8) ci siamo proposti di porre in evidenza come e fino a qual punto ciascuno degli altri strumenti possa da solo servire alla risoluzione di quei problemi.

E nello stesso tempo abbiamo voluto esporre, per ciascun caso, quelle più semplici costruzioni che la geometria proiettiva insegna, cercando tuttavia di spiegarle nel modo più elementare possibile.

Dobbiamo far subito una osservazione.

La geometria proiettiva ponendo in evidenza, fra tutte le linee, la *retta*, risponde a quello spirito che animò le ricerche dei geometri francesi del principio del secolo, di *effettuare le costruzioni fin dove è possibile colla sola riga*; il quale spirito invero, si riattacca a delle

esigenze pratiche della geometria sul terreno, come era pur nella mente degli autori stessi della *Geometria della riga.*

Ora le costruzioni colla riga (lineari) non sono atte ad *esprimere* (nonchè ad *effettuare*) *tutte* le relazioni geometriche, esprimendo esse soltanto le *relazioni grafiche*, concernenti l' appartenenza fra punti e rette; le *relazioni metriche* (ove si parla di *distanza, grandezza* d' *angoli* ecc.) non possono essere espresse mediante costruzioni lineari. E di tale impossibilità ci si convince osservando che le costruzioni lineari hanno *carattere proiettivo*, cioè si trasportano senza mutamento passando da un piano ad un altro mediante una proiezione, onde anche le relazioni che esse esprimono saranno del pari *proiettive*; invece le relazioni metriche, come p. e. l' uguaglianza di due distanze ecc., si perdono nell' indicato trapasso, non avendo (in generale) carattere proiettivo [1].

L' uso della riga riesce dunque sommamente utile nella soluzione dei *problemi grafici*, fra i quali vengono senz' altro risoluti dalla sola riga i *problemi di 1.° grado*, che la geometria analitica risolve con operazioni razionali (cfr. art. 10).

Ma non è a credere che i *problemi metrici* sfuggano alle applicazioni della geometria proiettiva. Anzi è uno dei punti di vista importanti, di tale scienza, quello (introdotto sistematicamente da Laguerre e da Cayley) che permette di riguardare le relazioni metriche come subordinate alle grafiche, cioè come relazioni grafiche della figura, non considerata in sè stessa, ma in rapporto ad alcuni *enti metrici fondamentali* del piano o dello spazio che la contiene.

---

[1] Vi sono però delle particolari relazioni metriche aventi carattere proiettivo (si pensi p. e. alla proprietà del birapporto di 4 punti di una retta); ma tali relazioni possono venir sostituite con relazioni grafiche - Cfr. p. e. Enriques « *Lezioni di geometria proiettiva* ».

Per limitarci al piano, le relazioni metriche si possono tutte esprimere mediante i concetti di *parallelismo* e di *perpendicolarità*. Il parallelismo di due rette si traduce nella proprietà di esse d' intersecarsi sopra una retta particolare, la *retta impropria* o *retta* all' *infinito*. La perpendicolarità di due rette, o meglio di due direzioni, si traduce in una particolare relazione dei punti all' infinito corrispondenti, i quali debbono essere coniugati in una certa *involuzione* (*involuzione assoluta* sulla retta all' infinito del piano).

Insieme la retta all' infinito e l' involuzione assoluta su di essa (corrispondenza fra le coppie di direzioni ortogonali) costituiscono gli enti metrici fondamentali del piano, o, brevemente, l' *assoluto*: tutte le relazioni metriche equivalgono a relazioni grafiche coll' assoluto, e quindi tutti i problemi metrici si riducono a problemi grafici quando fra i *dati* si pongono anche gli enti costituenti l' assoluto (o, in casi speciali, una parte di essi), assegnando nel piano qualche *figura fondamentale*.

Per le costruzioni di parallele basta dare come figura fondamentale un *parallelogramma*, cioè due coppie di rette parallele. Per le costruzioni, ove entra anche la nozione di perpendicolarità, occorre aggiungere *due coppie di direzioni ortogonali* (individuanti l' involuzione assoluta); allora si risolvono colla sola riga tutti i problemi metrici di 1.° grado.

In particolare questi problemi metrici di 1.° grado si risolvono colla sola riga quando è dato un *quadrato*, di cui i lati e le diagonali forniscono appunto due coppie di direzioni ortogonali (cfr. § 3).

Passando ai *problemi di 2.° grado* (grafici e metrici) e ai problemi ad essi riducibili, si ottiene il resultato fondamentale che *i problemi risolubili colla riga e col compasso si possono risolvere mediante la sola riga* quando si ha nel piano, completamente *tracciato, un circolo di*

dato centro (Poncelet). In questo caso il circolo stesso (conoscendosi il suo centro) serve a dare gli enti metrici fondamentali del piano.

La *riga a due orli* paralleli, è uno strumento che permette anzitutto di risolvere tutti i problemi di 1.° grado, grafici e metrici, costruendo gli enti metrici fondamentali del piano. Ma essa dà di più, in modo *immediato*, la risoluzione di una classe di problemi di 2.° grado, precisamente di quei problemi che si fondano sul *trasporto d' un segmento* (cfr. art. 10). Infine un uso ulteriore dell' istrumento permette di sostituire completamente il compasso.

Colla *squadra* o colla *falsa squadra*, usate in modo conveniente, si arriva allo stesso resultato; onde si può concludere che:

I problemi risolubili colla riga e col compasso si possono anche risolvere coll' uso esclusivo della riga a due orli, della squadra, o della falsa squadra.

In luogo di notizie storiche più ampie diamo il seguente indice bibliografico dei principali lavori a noi conosciuti che si riferiscono all' argomento:

Lambert. *Freie Perspective*, (1774). — Servois. *Solutions peu connues de différents problèmes de Géométrie pratique*, (Paris, 1805) — Brianchon. *Des applications de la théorie des transversales*, (Paris, 1818) — Poncelet. *Traité des propriétés projectives des figures*, (Paris, 1822) — Cremona. *Geometria proiettiva* — Enriques. *Lezioni di Geometria Proiettiva*, (Bologna, 1898) — Steiner. *Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises*, (Gesammelte Werke, Berlin 1881) — Klein. *Conferenze sopra alcune quistioni di Geometria Elementare*, Trad. di F. Giudice (Torino, 1896) — Frischauf. *Die geometrischen Constructionen von Mascheroni und Steiner*, (Graz, 1869) — Adler. *Uber die zur Ausführung geometrischer Constructionsaufgaben zweiten Grades*

nothwendigen Hilfsmittel (Sitzungsberichte der math-naturw. Klasse der K. Akademie der Wiss. zu Wien B. 99. 1890) — LONGCHAMPS. *Essai sur la Géométrie de la Règle et de l' Équerre*, (Paris, 1890).

§ 1. **I problemi grafici di primo grado.** — I problemi grafici di primo grado, che rientrano nella Geometria Elementare, si riducono in sostanza a determinare il punto d' incontro di due rette date ed a congiungere con una retta due punti dati. Ora i punti e le rette che si considerano come *dati* possono talvolta non comparire entro il foglio del disegno, ma essere ciò non ostante *individuati* mediante altri elementi che invece compaiono entro il foglio. Così un punto può essere dato fuori del foglio come punto d' incontro di due rette, che hanno una parte nel foglio; una retta può essere data mediante due suoi punti, dei quali uno o entrambi siano dati fuori del foglio.

In questi casi, la risoluzione di tutti i problemi grafici di primo grado si può raggiungere mediante il *teorema dei triangoli omologici,* che qui ci limitiamo ad enunciare [1]:

Se due triangoli senza elementi comuni (lati o vertici), sono riferiti fra loro lato a lato, vertice a vertice, e se le coppie di lati omologhi si incontrano rispettivamente in tre punti appartenenti ad una stessa retta, le tre congiungenti i vertici omologhi passano per uno stesso punto; ed inversamente, se le tre congiungenti i vertici omologhi passano per uno stesso punto, i lati omologhi s' incontrano in tre punti della medesima retta.

Sono a considerarsi come casi particolari di questo teorema, quelli in cui i due triangoli abbiano due lati omologhi paralleli alla retta che congiunge i punti di

---

[1] Per la dimostrazione, v. per es. CREMONA. *Geometria proiettiva.*

incontro delle altre due coppie, ovvero abbiano i lati omologhi rispettivamente paralleli, ovvero le tre congiungenti i vertici omologhi siano parallele anzichè concorrenti in un punto. E la dimostrazione del teorema nella sua forma generale si adatta facilmente a questi casi particolari.

Problema. — *Condurre una retta per due punti, dei quali uno è dato fuori del foglio* (Fig. 1 - Tav. I). Siano P ed (aa') i due punti dati. Si conducano per P due rette arbitrarie b, b'; per il punto S, scelto arbitrariamente sulla congiungente i punti (ab), $(a'b')$, si tirino i due raggi arbitrarî p, q, e si completino i due trilateri omologici abc, $a'b'c'$. Il loro *asse di omologia,* determinato sul disegno dai punti (cc') e $(bb') \equiv P$, sarà la retta richiesta.

Può essere comodo scegliere per la retta p quella che congiunge i punti (ab'), $(a'b)$: in tal caso solamente le rette b, b', q si tracciano in modo arbitrario, e la costruzione prende l'aspetto della Fig. 2 - Tav. I [1].

Un'altra soluzione del medesimo problema, fondata anch'essa sulla omologia, consiste nel fissare un asse di omologia r (Fig. 3 - Tav. I) e nel costruire un triangolo che abbia un vertice in P e gli altri due sulle a, a'; ogni altro triangolo omologico col primo, determina la retta richiesta come congiungente i vertici omologhi P, P'.

Evidentemente queste costruzioni permettono anche di congiungere due punti dati entro il foglio, quando la loro distanza superi la lunghezza della riga che si possiede.

Inoltre, il medesimo teorema sui triangoli omologici ci permette di applicare le costruzioni ora enumerate alla risoluzione del problema: *Condurre per un punto P*

---

[1] V. per es. Cremona. *Geometria proiettiva.*

dato entro il foglio la parallela a due rette parallele date a, a'.

Problema. — *Condurre la retta che congiunga due punti, dati entrambi fuori del foglio.* Siano (aa'), (bb'), (Fig. 4 - Tav. I) i due punti dati. Ogni qual volta si sappiano costruire due triangoli omologici, di cui $a, b; a', b'$ siano due coppie di lati omologhi, i due rimanenti lati concorreranno in generale in un punto, il quale apparterrà alla retta richiesta.

Sulla congiungente i vertici (ab), $(a'b')$ si scelga un punto arbitrario S come *centro di omologia,* e per S si conducano due raggi arbitrari p, q. Completati i trilateri omologici abc, $a'b'c'$, si ottiene il punto (cc') che appartiene alla retta richiesta; completati analogamente i trilateri omologici abd, $a'b'd'$, si ottiene pure il punto (dd'). La retta richiesta è quella che passa per i punti (cc'), (dd').

Si noti anche qui il caso particolare: *Date due rette parallele a, a', e dato un punto fuori del foglio (bb'), condurre per questo punto la parallela a quelle.*

Problema - *Data una retta del foglio, e data una retta fuori del foglio, determinare il loro punto d'incontro mediante un'altra retta del foglio che passi per esso.*

Siano (aa'), (bb') i punti che determinano la retta data fuori del foglio (Fig. 5 - Tav. I) e sia c la retta data nel foglio. Basterà anche quì costruire una coppia di trilateri omologici abc, $a'b'c'$; il terzo lato c' incognito sarà la retta richiesta.

Sulla retta r che congiunge i vertici (ab), $(a'b')$ si scelga un centro di omologia S: i raggi che partono da S e vanno ai punti (cb), (ca) determinano sui lati b', a' rispettivamente i vertici $(c'b')$, $(c'a')$, la cui congiungente è la retta richiesta c'.

Si ottengono quante si vogliono rette che rispondono al problema facendo variare il centro di omologia S

sulla r. E se si voglia determinare quella, che passa per un punto P, dato nel foglio o fuori, converrà congiungerlo col punto (cc') mediante le costruzioni indicate nei due problemi precedenti; altrimenti si potrà sostituire alla a' la retta a'' che congiunge P col punto (aa'), e scegliere per centro di omologia il punto in cui la r incontra la retta $P.\ (ac)$.

La costruzione esposta si applica evidentemente al caso particolare: *Date sul foglio del disegno due coppie di rette parallele* a, a' e b, b', *condurre per un punto* P, *dato nel foglio o fuori, la parallela ad una retta arbitraria* c *data nel foglio* (Fig. 6 - Tav. I), il quale si ricondurrà ad uno dei due problemi particolari più sopra citati.

Ma vogliamo quì esporre un' altra soluzione elegante di questo problema [1], la quale in sostanza è anch' essa un' applicazione del teorema sui triangoli omologici.

Indichiamo con d la diagonale che congiunge i vertici (ab'), $(a'b)$ del dato parallelogramma (Fig. 7 - Tav. II), con s, s' le rette che congiungono P rispettivamente coi punti (bc), $(b'c)$, e finalmente con t una qualsivoglia retta passante per il punto (dc).

La retta r che congiunge i punti (ac), (ts') incontra la retta r' che congiunge i punti $(a'c)$, (ts) in un punto Q, il quale starà con P sopra una medesima parallela alla retta data c.

Si consideri infatti la c come intersezione di due piani, dei quali l' uno, α, contenga le rette date a, a', b, b' e l' altro, β, contenga le rette r, r', s, s'; si vedrà intanto, che i due piani (ar), $(a'r')$ si intersecano secondo una retta q passante per Q e parallela al piano α, e che analogamente i piani (bs), $(b's')$ si intersecano secondo una retta p passante per P e parallela al piano α.

---

[1] LAMBERT. *Freie perspective*, 1774.

Le due coppie di trilateri omologici *abd, rst; a'b'd, r', s', t* hanno un comune centro di omologia *S*, il quale dovendo giacere sopra tutti quattro i piani (*ar*), (*a'r'*), (*bs*), (*b's'*) giacerà sopra entrambe le rette *p, q*. Queste ultime stanno dunque sopra un medesimo piano, il quale è parallelo ad α; e la *PQ* è parallela quindi alla retta data *c*.

Problema. — *Date due rette fuori del foglio, determinare il loro punto d' incontro mediante due rette del foglio che passino per esso.* Siano (*ab*), (*a'b'*) i due punti che individuano la prima retta *r* (Fig. 8 - Tav. II), (*ef*), (*e'f'*) quelli (non segnati nella figura), che individuano la seconda retta *s*. Conviene qui di considerare il punto d' incontro delle due rette date come centro di omologia di due triangoli omologici. Se *a, b* sono due lati di uno di questi triangoli, e *a', b'* sono i lati omologhi dell' altro, il loro asse di omologia è la retta che passa per i punti (*aa'*), (*bb'*).

Colle costruzioni precedenti, e valendosi dei punti (*ef*), (*e'f'*), si determini una qualunque retta del foglio che passi per il punto in cui la *b* incontra la *s*: sia *c* questa retta, e sia *M* il suo punto d' incontro coll' asse di omologia. Si congiunga *M* col punto (*b's*). Si avranno così i due triangoli omologici *abc, a'b'c'*; e la retta che congiunge i vertici (*ac*), (*a'c'*) passa per il centro di omologia.

Facendo variare la retta *c*, e quindi la *c'*, si hanno quante si vogliano rette passanti per il punto richiesto: basterà determinarne due qualunque per poter poscia congiungere il loro punto di concorso, cioè il punto (*rs*), con un punto *P* dato arbitrariamente nel foglio o fuori.

Notiamo anche qui il caso particolare: *Date due coppie di rette parallele a, b* e *a', b', condurre da un punto P, dato nel foglio o fuori, la parallela ad una retta data fuori del foglio.*

§ 2. **Nozioni sui gruppi armonici.** — Premettiamo qui alcune nozioni sui *gruppi armonici di punti,* le quali ci saranno utili nel seguito.

Sia dato un triangolo ABC (Fig. 9 - Tav. II), e si consideri la retta AE condotta dal vertice A parallelamente alla base BC. Si conduca per il punto di mezzo D della base una retta qualsiasi, e siano N, D, M, E i suoi punti d'incontro coi lati del triangolo e colla retta AE. La simiglianza dei triangoli AEN, BDN; AEM, DCM porta a concludere facilmente che i rapporti

$$\frac{EN}{DN}, \frac{EM}{DM}$$

sono eguali, che cioè le distanze del punto N dagli estremi del segmento DE stanno fra loro come le distanze del punto M dai medesimi estremi. E ne viene quindi ancora che

$$\frac{EN}{EM} = \frac{DN}{DM},$$

che cioè le distanze del punto E dagli estremi del segmento MN, stanno fra loro come le distanze del punto D dai medesimi estremi. Quattro punti così disposti si dicono *armonici;* si dice che M ed N *separano armonicamente* D ed E, e quindi anche che D ed E separano armonicamente M ed N. Dati quattro punti armonici N, D, M, E, si può subito ricostruire la figura 9; basta infatti congiungere i punti dati con un medesimo punto A arbitrariamente scelto fuori della loro retta, conducendo poscia per uno *qualsivoglia* di essi, p. es. D, la parallela alla retta che congiunge con A il punto E *coniugato armonico* di D.

I quattro raggi AN, AD, AM, AE godono della proprietà che qualunque retta passante per D, e quindi anche qualunque altra retta del piano, purchè non parallela ad alcuno dei quattro raggi, li taglia secondo quattro punti armonici; e si dicono perciò *raggi armonici.*

La medesima figura 9 mostra come si possa costruire il *quarto armonico* E dati i tre punti N, D, M, purchè si sappia costruire per D un segmento dimezzato dal punto D stesso e purchè si sappia costruire per il punto d' incontro delle NB, MC la parallela al segmento BC.

Si osservi ancora, che se nella medesima figura 9 si fa scorrere p. es. il punto M sulla trasversale NE, mentre si mantengono fissi i punti A, D, E, rimanendo sempre $BD = DC$, a misura che il punto M si avvicina al punto di mezzo del segmento DE, la lunghezza di BD si accosta alla lunghezza di AE, cioè il punto N si allontana indefinitamente sulla retta DE; ciò si esprime brevemente dicendo che dati due punti D, E il coniugato armonico del loro punto di mezzo rispetto ad essi è il *punto all' infinito* della loro retta; e quando sia M il punto di mezzo del segmento DE, il raggio coniugato armonico di AM rispetto ai raggi AE, AD, è parallelo al segmento DE.

Se in un piano sono dati due gruppi armonici di raggi a, b, c, d; a', b', c', d' (Fig. 10 - Tav. II) e se i raggi a, a'; b, b'; c, c' si incontrano sopra una medesima retta, i raggi d, d' passeranno entrambi per il coniugato armonico del punto (bb') rispetto ai punti (aa'), (cc'), cioè il loro punto d' incontro sarà anch' esso allineato con quei tre.

Ciò posto, si osservi la figura 11 della Tav. II, nella quale, dati i punti A, B, C, si è costruito il quadrilatero $PMQN$, di cui due lati opposti passano per A, gli altri due per C, ed una diagonale per B; si indichi con x il raggio coniugato armonico di PO rispetto alla coppia PM, PN, e con y il coniugato armonico di QO rispetto alla coppia QM, QN. Per quanto precede, i raggi x, y avranno il loro punto comune, sia sulla diagonale MN, sia sulla retta AC; essi passano dunque per D, e sarà D il coniugato armonico di B rispetto ai punti A, C.

§ 3. **Problemi metrici di 1.° grado.** — Quando adunque siano dati sopra una retta tre punti A, B, C, si potrà sempre *colla sola riga* costruire il coniugato armonico di uno di essi rispetto agli altri due; e quando in particolare il punto B sia equidistante dai punti A, C, la costruzione indicata dalla figura 11 permette di tracciare quante si vogliano rette MN parallele ad AC. Inversamente, se è dato un segmento AC e se è assegnata una parallela al medesimo, si può determinare il punto di mezzo del segmento, congiungendo un punto arbitrario P con A e con C, e poscia col punto d' incontro delle AN, CM. Le poche nozioni che abbiamo esposte intorno agli elementi armonici, ci hanno condotto dunque a concludere, come l' assegnare sopra una retta un segmento diviso in due parti eguali, permetta, *mediante costruzioni colla sola riga,* di assegnare quante si vogliano parallele alla retta medesima [1]. Ed è appunto questo

---

[1] Non è a credere però che il principio enunciato nel testo non si possa stabilire facendo uso solamente di nozioni elementari. Si osservi infatti la figura 12, ove si è congiunto un punto O della mediana DC, cogli estremi A, B della base del triangolo; si indichino colle lettere minuscole segnate sulla figura le aree dei varî triangoli che hanno un vertice in O; tenendo conto delle varie coppie di triangoli che hanno eguale altezza, si avranno le proporzioni:

$$\frac{c+d}{b} = \frac{e+f}{a},$$

$$\frac{c+d}{e} = \frac{a+b}{f}.$$

Ma C è il punto medio della base AB, onde

$$e + f = a + b.$$

Si conclude che

$$\frac{b}{a} = \frac{e}{f}, \quad \text{onde:} \quad \frac{BM}{MD} = \frac{AN}{DN}.$$

La retta MN è dunque parallela alla AB.

E se inversamente è data la MN parallela alla base AB, il ragionamento inverso porta a concludere che la DO è la mediana del triangolo.

principio, che ci condurrà a stabilire fino a qual punto *l' uso della sola riga* si renda utile nelle costruzioni della Geometria Elementare.

Problema. — *Dati sopra una retta due segmenti eguali contigui, condurre per un punto esterno M la parallela alla retta.* Siano AC, CB i due dati segmenti eguali (Fig. 13 - Tav. II) si congiunga A con M e B con N; si scelga p. es. sulla AM un punto qualunque O, che congiunto con C determinerà il punto D; si descrivano la BO e la DA; il loro punto d' incontro N, congiunto con M, darà la retta richiesta.

La medesima figura offre la soluzione dei seguenti problemi:

Date due rette parallele MN, AB, e sopra una di queste un segmento AC, dividere questo segmento in due parti eguali.

Date due rette parallele MN, AB, e sopra una di queste un segmento AB, raddoppiare questo segmento.

E quest' ultimo, ripetuto più volte, permette di *costruire colla sola riga un segmento multiplo di un segmento dato,* purchè si conosca una parallela al medesimo.

Evidentemente poi, *date sul piano due rette parallele, si può condurre da un qualsiasi punto del piano la retta parallela ad esse:* basterà assumere sopra una delle rette date un segmento arbitrario, che si dividerà in due parti eguali; e si proseguirà poscia colla costruzione sopra indicata (Vedi anche le costruzioni indicate al § 1).

Ma è utile fare la osservazione seguente. Se sono date le parallele AB ed MN ed il punto D, e se si indica con P il punto di mezzo del segmento MN (Figura 13 - Tav. II), si può subito trovare un punto che stia con D sulla stessa parallela ad AB; esso è il punto D' in cui si intersecano le AP, CM; infatti i due rapporti $DN : DA$, $D'P : D'A$ sono entrambi eguali al rapporto $NP : AC$.

È anche notevole che le rette $D'N$, DH; $D'K$, DL, ecc. offrono un mezzo semplice per costruire un segmento multiplo di BC o di PM.

Problema. — *Dividere un segmento in n parti eguali conoscendosi una retta parallela al segmento.*

Sopra questa retta si segneranno, colla costruzione testè indicata, n segmenti eguali e contigui AB, BC, CD, ... KL. Se M ed N sono gli estremi del segmento dato, e se O è il punto d' incontro delle rette AM, LN (ovvero AN, LM), basterà congiungere O con B, C, D,.. K; le congiungenti divideranno il segmento MN in n parti eguali.

Profittando però di quanto fu esposto sui gruppi armonici, possiamo più speditamente *determinare la* n^{esima} *parte di un segmento dato* AB, quando si conosca una parallela a questo segmento. Si determini infatti, colla solita costruzione, il punto di mezzo C del dato segmento; e si congiunga C con M, D con C (Fig. 14 - Tav. III). Il punto E è coniugato armonico di A rispetto alla coppia C, B, onde

$$EC : EB = AC : AB = 1 : 2$$

ed il segmento EB è dunque la *terza* parte di AB.

Si congiunga ancora E con M, D con E'. Il punto F è il coniugato armonico di C rispetto alla coppia E, B, onde:

$$FE : FB = CE : CB = 1 : 3$$

ed il segmento FB è dunque la *quarta* parte di AB.

Così proseguendo si perviene a determinare la n^{esima} parte di AB.

Dato dunque un segmento diviso in due parti eguali, oppure dato un segmento ed una parallela ad esso, si può colla sola riga *determinare un segmento che stia al dato in un rapporto razionale* $\frac{m}{n}$. Si determinerà il segmento m^{plo} del dato, e si costrurrà la sua n^{esima} parte.

Siano date ora due coppie di rette parallele, formanti entro il foglio un parallelogramma $ABCD$ (Fig. 15 - Tav. III): è facile vedere come in tal caso si possano risolvere colla sola riga tutte le quistioni finora trattate, relativamente però a qualunque retta od a qualunque segmento del piano. Si osservi infatti che quando si conduca per il centro del parallelogramma, p. es. la parallela ai lati AB, DC le tre parallele AB, EF, DC staccheranno in generale sopra una qualsiasi retta del piano due segmenti eguali e contigui; e se questa retta avesse tale posizione da incontrare quelle parallele fuori del foglio, si adopreranno le altre BC, AD, HL, oppure si condurranno per gli estremi di una diagonale le parallele all' altra diagonale del parallelogramma.

Sia dato p. es. sopra una retta r un segmento qualunque, e si voglia dividerlo in m parti eguali. Per mezzo del parallelogramma si staccheranno sopra r due segmenti eguali e contigui ME, EN. Si potrà allora costruire una retta $M'N'$ parallela alla r, e sulla $M'N$ m segmenti eguali e contigui; si perverrà quindi, nel modo più sopra accennato, alla divisione del dato segmento in m parti eguali.

Abbiamo dunque anche un' altra soluzione del problema (§ 1): *dato sul foglio un parallelogramma, condurre per un punto dato la parallela ad una retta data.*

Potremo ora risolvere anche il problema: *Condurre per un punto dato un segmento eguale e parallelo ad un segmento dato.*

Se M è il punto, ed AB il segmento, si congiunga M con A, e si tracci per M la parallela ad AB, per B la parallela ad MA.

Ne concluderemo che *quando sia assegnato sul foglio del disegno un parallelogramma* (od anche due rette parallele ed un punto equidistante da esse) *si potrà eseguire il trasporto parallelo dei segmenti* (ed in particolare il

trasporto d' un segmento sopra una retta) *moltiplicandoli*, quando si voglia, per un numero razionale $\frac{m}{n}$.

I problemi finora trattati però non riguardano le proprietà angolari delle figure, nè quindi il trasporto non parallelo dei segmenti e degli angoli.

Dànno luogo a problemi metrici di primo grado le quistioni relative agli angoli retti: e possono essere risoluti colla sola riga non appena siano date sul piano le due coppie di rette parallele più sopra considerate, ed inoltre due coppie (non parallele) di rette ortogonali.

Problema. — *Per un punto dato condurre la perpendicolare ad una retta data.*

Sia dato sul piano il consueto parallelogramma, e siano date le coppie a, b; a', b' di rette ortogonali. Se il punto dato M è esterno alla retta data r, si descrivano le rette MA, MB (Fig. 16 - Tav. III) rispettivamente parallele alle rette a, a', e quindi le AC, BD rispettivamente parallele alle b', b. La retta MO sarà la perpendicolare richiesta, perchè O è il punto di concorso delle tre altezze del triangolo MAB.

Quando poi il punto M sia sulla r, converrà tracciare una qualsivoglia parallela alla r, ecc.

Osservazione. — La possibilità di risolvere tutti i problemi metrici di primo grado coll' uso della sola riga, quando siano assegnate due coppie di rette parallele e due coppie di *direzioni* ortogonali, non riuscirà nuova a chiunque abbia familiarità colla Geometria proiettiva. È noto infatti (come abbiamo pur ricordato nell' introduzione) che tutte le proprietà metriche delle figure piane non sono altro che relazioni grafiche di esse figure cogli *enti metrici fondamentali del piano*, cioè colla retta all' infinito e coll' involuzione assoluta; ed ogni problema metrico si potrà quindi trattare come un problema gra-

fico, non appena si siano aggiunti ai dati del problema la retta all' infinito e l' involuzione assoluta.

Ora appunto la retta all' infinito si dovrà considerare come assegnata, quando sono assegnati due de' suoi punti, cioè quando sono date due coppie di rette parallele. E la involuzione assoluta sarà assegnata quando siano assegnate due delle sue coppie, cioè quando siano date due coppie (non parallele) di rette ortogonali.

Aggiungiamo però che un problema metrico può aver relazioni, non già con tutto l' assoluto, ma solamente con una parte di esso, p. es. con un solo punto a distanza infinita, o con la sola retta all' infinito; in tali casi il problema metrico si può trattare come un problema grafico (e quindi risolversi colla sola riga se è di primo grado), anche se non è assegnato tutto l' assoluto, purchè ne sia assegnata quella parte che ha relazione col problema. Ed è per ciò appunto che noi siamo venuti risolvendo i problemi metrici di primo grado, assegnando via via quegli enti metrici che erano strettamente necessarî.

Date sul foglio del disegno due coppie di rette parallele e due coppie di rette ortogonali, si può colla sola riga *far ruotare un angolo dato* (non però un segmento) *di un angolo retto.*

Si può *costruire un angolo n-uplo di un angolo dato.* Se infatti (Fig. 17 - Tav. III) si costruisce una perpendicolare MN ad un lato dell' angolo ABC, e si costruisce il segmento $MP = MN$, l' angolo ABP è doppio del dato: per ottenere l' angolo n-uplo, non si ha che a ripetere la medesima costruzione.

Notiamo, fra i più notevoli problemi metrici di primo grado, i seguenti:

Dato il centro O (Fig. 18 - Tav. III) *ed un punto M di un cerchio* (oppure dati tre punti) *determinare il secondo punto d' incontro di una retta per M col cerchio.* Si

costruisca il diametro MOM', e dal punto M' si abbassi la perpendicolare sulla retta data: il piede di questa perpendicolare è il punto cercato. Si possono in tal modo costruire colla sola riga quanti si vogliano punti della circonferenza. Ciò non significa però che si possano determinare colla sola riga quei punti della circonferenza che appartengono ad una retta arbitrariamente assegnata *a priori*.

Dato il centro O ed una tangente m di un cerchio, determinare la seconda tangente passante per un punto dato della m. Si determini il punto di contatto della *m* e da esso si abbassi la perpendicolare al diametro passante per il punto dato; ecc. Si possono in tal modo determinare quante si vogliano tangenti al cerchio; ma ciò non significa però che si possano determinare colla sola riga quelle tangenti che passano per un punto arbitrariamente assegnato *a priori*.

I problemi metrici di primo grado si potranno evidentemente ancora risolvere colla sola riga, quando sul foglio gli enti metrici fondamentali vengano assegnati mediante una figura più complessa, che li possa fornire. E se la figura *data* sia tale da includere in sè stessa la soluzione di qualche problema non lineare, essa permetterà inoltre di risolvere tutti quei problemi che si possono far dipendere dai problemi di primo grado e da quel problema non lineare.

Ne abbiamo un esempio [1] quando si supponga assegnato sul foglio del disegno *un quadrato*.

I suoi lati e le sue diagonali forniscono gli enti metrici fondamentali. Ma gli enti metrici fondamentali dati *a priori* e l'uso della sola riga non permettono di costruire un quadrato, poichè tale costruzione esige che si sappia *bisecare un angolo retto*, ovvero che si sappia

---

[1] STEINER, l. c.

far ruotare un segmento di un angolo retto. La conoscenza dunque di un quadrato assegnato *a priori* sul foglio permetterà di risolvere tutti i problemi metrici lineari, ed inoltre tutti quei problemi (di secondo grado) che dipendono dalla bisezione dell' angolo retto.

Sia $ABCD$ (Fig. 19 - Tav. III) il quadrato dato, e si voglia *ruotare un dato segmento di un angolo retto intorno ad un estremo.*

Sia MN il segmento dato. Per il centro O del quadrato si descriva la OP parallela ad MN; si costruisca la PQ parallela ad AB e la QR parallela alla diagonale DB. La retta OR sarà perpendicolare ad OP, ciò che si verifica subito osservando la eguaglianza dei triangoli AOR, BOP. Il triangolo ROP è isoscele e rettangolo; e si risolverà dunque il problema proposto tracciando per M la parallela ad OR, o per N la parallela ad RP.

Si può, con le medesime costruzioni, *ruotare di 45° una retta qualunque intorno ad un suo punto o un angolo qualunque intorno al suo vertice.*

I lati e le diagonali di *un esagono regolare dato a priori* sul foglio del disegno determinano egualmente gli enti metrici fondamentali; ma la costruzione di esso richiede la *trisezione dell' angolo retto.* E si vedrà facilmente come la conoscenza dell' esagono regolare permetta di far compiere ad un segmento una rotazione di 60° ad una retta (o ad un angolo) di 30° (Fig. 21 - Tav. III).

Un cerchio completamente descritto e di centro conosciuto definisce gli enti metrici fondamentali mediante quanti si vogliano rettangoli inscritti in esso (di cui le diagonali passano pel centro); la costruzione del cerchio però non dipende dalla risoluzione di alcun particolare problema, ma bensì dall' *uso del compasso.* Si vedrà nel § seguente come la conoscenza del cerchio e del suo centro permetta di risolvere colla sola riga tutti i problemi di secondo grado. Qui notiamo solamente che il cerchio semplifica

notevolmente la risoluzione di alcuni problemi lineari. Fra gli altri il seguente:

Determinare una perpendicolare ad una retta data r. Se questa retta non incontra il cerchio fondamentale, oppure se passa per il centro, si costruisca (mediante un qualunque rettangolo inscritto nel cerchio) una qualsiasi retta che incontri il cerchio e che sia parallela alla r. Siano M ed N i suoi punti d' incontro col cerchio, e sia MP il diametro per M. La retta NP è normale alla r (Fig. 20 - Tav. III). Se la retta data incontra il cerchio fondamentale senza passare per il centro, torna inutile il costruire una corda ad essa parallela.

§ 4. **I problemi metrici di 2.° grado.** — Nella risoluzione di taluni problemi di geometria elementare, oltre che la conoscenza degli enti metrici fondamentali e l' uso della riga, si rende *necessario* l' uso del compasso. Ciò dipende dal fatto, che il solo tracciamento di rette non permette di raggiungere la risoluzione di quei problemi, senza che vi si aggiunga il tracciamento di uno o più cerchi (cfr. art. 10). Questi problemi si dicono *risolubili colla riga e col compasso*; intendendo dire con ciò che in essi è possibile passare dagli elementi *dati* agli elementi *richiesti* mediante una serie di operazioni fondamentali, eseguibili ciascuna o colla riga o col compasso.

Ora, le operazioni eseguibili colla sola riga sono le seguenti:

1. Tracciare una retta.
2. Determinare la intersezione di due rette, date mediante due punti, ma non tracciate;
3. Determinare le intersezioni di un cerchio tracciato con una retta *data*, ma non tracciata.

Le operazioni fondamentali eseguibili col compasso sono:

4. Descrivere un cerchio, dato un suo punto ed il centro;

5. Determinare i punti d'incontro di una retta tracciata con un cerchio *dato* mediante il centro ed un punto della circonferenza, ma non tracciato;

6. Determinare i punti d'incontro di due cerchi *dati*, ma non tracciati.

Nella ricerca dei *punti* che conducono alla soluzione di un problema, solamente le operazioni 5 e 6 esigono l'uso del compasso. Ma noi mostreremo in questo paragrafo come l'operazione 6 si possa ricondurre, facendo uso della sola riga, all'operazione 5; e mostreremo come l'operazione 5 si riconduca colla riga all'operazione 3, nella quale il cerchio tracciato sarà arbitrariamente scelto, ma di centro conosciuto. Onde potremo concludere che *tutte le operazioni eseguibili colla riga e col compasso per la ricerca delle mutue intersezioni di rette e cerchi* (salvo cioè il *tracciamento* delle circonferenze) *si possono effettuare coll' uso della sola riga, purchè sul foglio del disegno sia assegnata una circonferenza completamente tracciata e di centro conosciuto* [1].

Sono *problemi di 2.° grado o riducibili ad una successione di problemi di 2.° grado*, quei problemi costruttivi determinati, che si risolvono (nel piano) cogl'istrumenti riga e compasso (cfr. art. 10). Verremo dunque a concludere che: *i problemi di primo e di secondo grado sono risolubili colla sola riga, purchè sul foglio del disegno sia assegnata una circonferenza completamente tracciata e di centro conosciuto.*

---

[1] Se il centro non è conosciuto, si rende necessaria la conoscenza del solo parallelogrammo fondamentale, con che si possono tracciare e bisecare delle corde parallele quante si vogliono. Ed è naturale che il cerchio basti a completare gli enti metrici fondamentali, perchè esso determina sulla retta all'infinito i punti doppî dell'involuzione assoluta.

Dato dunque sul foglio del disegno il *cerchio fondamentale*, ci proporremo di risolvere colla sola riga i due problemi:

1.° *Determinare le intersezioni di una retta r col cerchio che ha il centro in un dato punto M e che passa per un dato punto N.*

2.° *Determinare le intersezioni di due cerchi di dato centro e dato raggio.*

Per il 1.° si conduca, nel cerchio fondamentale (Fig. 22 - Tav. III), ON' parallelo ad MN [1]; le rette MO, NN' determinano il *centro di omotetia* S dei due cerchi. Se è H il punto d' incontro del diametro MN colla r, il punto *omologo* H' sarà il punto d' incontro della HS col diametro ON'; e la retta r' condotta per H' parallelamente alla r, sarà la omologa di r. Sulla r' sono E', F' i punti d' incontro col cerchio fondamentale. Congiungendo il centro di omotetia S con E' ed F' si otterranno sulla r i due punti E ed F, che saranno i richiesti punti d' incontro col cerchio M. Si può osservare infatti che, per la simiglianza dei triangoli EHM, $E'H'O$ si ha:

$$EM : E'O = MH : OH' = MN : ON'$$

onde

$$EM = MN;$$

e analogamente

$$FM = MN.$$

Quando accada che la retta r' non incontri il cerchio fondamentale, ciò vorrà dire che la r non incontra il cerchio M.

---

[1] Quando il raggio dato MN sia sulla medesima retta col centro O del cerchio fondamentale, converrà costruire per M un altro raggio eguale ad M. Si conduca per M una retta qualunque, su di essa si abbassi la perpendicolare NA, e si prenda su questa un segmento AK eguale ad NA. Il raggio MK sarà eguale ad MN, e non sarà più allineato con O.

Il secondo problema: *determinare i punti d' intersezione di due cerchi di dato centro e dato raggio,* si ridurrà facilmente al primo.

Per questo però converrà ricordare qualche nozione sull' *asse radicale* di due cerchi.

Se P è un punto sul piano di un cerchio O, ed è PMM' una qualsiasi segante, il prodotto

$$\overline{PM} \,.\, \overline{PM'} = \overline{PO}^2 - r^2$$

(r essendo il raggio del cerchio) è costante, e si dice la potenza del punto P rispetto al cerchio O.

Se O ed O' sono due cerchi di raggio r, r' rispettivamente (Fig. 23 - Tav. IV) il punto P è un punto di eguale potenza rispetto ai due cerchi se

$$\overline{PO}^2 - r^2 = \overline{PO'}^2 - r'^2$$

od anche

$$\overline{PO}^2 - \overline{PO'}^2 = r^2 - r'^2.$$

Si osservi poi, che se è Q il piede della perpendicolare calata da P sulla retta dei centri OO', ogni altro punto P_1 di questa perpendicolare sarà un punto di egual potenza tutte le volte che sia tale il punto P; poichè infatti

$$\overline{P_1O}^2 - \overline{P_1O'}^2 = \overline{PO}^2 - \overline{PO'}^2 = \overline{QO}^2 - \overline{QO'}^2.$$

La retta PP_1 è dunque il luogo dei punti di egual potenza rispetto ai due cerchi, e si dice *asse radicale* dei medesimi. Quando due cerchi si intersecano, la corda comune è l' asse radicale.

Dati infine tre cerchi O, O', O'', esiste nel loro piano in generale un solo punto di egual potenza rispetto a tutti tre: ed è il punto in cui si incontrano l' asse radicale di O, O' e l' asse radicale di O', O'' (e quindi anche l' asse radicale di O, O''). Questo punto dicesi *centro radicale*

dei tre cerchi: quando esso venga determinato mediante gli assi radicali delle coppie O, O'; O', O'', esso stesso può servire a costruire l' asse radicale della coppia O, O''; infatti è evidente che questo asse è la perpedicolare calata dal centro radicale sulla retta dei centri O, O''.

La costruzione dell' asse radicale di due cerchi O, O' si può fare coll' uso della sola riga, e non richiede che entrambi i cerchi (bensì però uno) siano interamente descritti.

Sia infatti O il cerchio interamente descritto e O' il cerchio determinato mediante il centro O' ed il raggio $O'M'$ (Fig. 23 - Tav. IV). Il raggio OM parallelo ad $O'M'$ servirà a determinare il *centro di omotetia* S dei due cerchi. Sia ancora p^2 la potenza del punto S rispetto al cerchio O, e q^2 la potenza del punto S rispetto al cerchio O'; si avrà:

$$SM \,.\, SN = p^2 \,, \qquad SM' \,.\, SN' = q^2$$

e quindi:

$$SM \,.\, SN' \,.\, SN \,.\, SM' = p^2 q^2 \,.$$

D' altra parte, per la proporzione:

$$SM : SM' = SN : SN'$$

si ha:

$$SM \,.\, SN' = SN \,.\, SM'$$

onde

$$SN' \,.\, SM' = pq \,.$$

Un' altra trasversale $SM_1N_1M_1'N_1'$ darebbe analogamente:

$$SN_1 \,.\, SM_1' = pq \,;$$

donde si vede che i quattro punti N, M', N_1, M_1' (e analogamente i quattro punti M, N', M_1, N_1') stanno sopra una circonferenza O''. Il punto comune alle rette MM_1, $N'N_1'$ è dunque il centro radicale C dei cerchi O, O', O'', epperò sta sull' asse radicale richiesto. Questo

asse radicale sarà dunque la perpendicolare calata da C sulla retta OO': e potrà ottenersi ricercando il centro radicale C' di un' altra analoga terna O, O', O''' e congiungendo quindi C con C'.

Ci riuscirà facile ora di risolvere il problema ultimamente enunciato. Sia O il cerchio fondamentale. e si vogliano determinare i punti d' intersezione dei due cerchi, i cui centri sono O', O'' ed i cui raggi sono $O'M'$, $O''M''$.

Converrà ricercare, mediante la costruzione or ora esposta, l' asse radicale r'' dei cerchi O, O', e l' asse radicale r' dei cerchi O, O''. Il punto $(r'r'')$ sarà il centro radicale dei tre cerchi; e abbassando da esso la perpendicolare sulla retta $O'O''$ si otterrà l' asse radicale r dei due cerchi O', O''.

Il problema viene così ricondotto a determinare le intersezioni della retta r col cerchio O' (oppure col cerchio O'') dato il cerchio interamente descritto O: e tale è il problema precedentemente risolto.

Fra i problemi di secondo grado ve ne hanno taluni, la cui risoluzione si può rendere più spedita facendo uso direttamente del cerchio fondamentale. E noi ne diamo qui qualche esempio fra i più semplici, risolvendo i tre problemi che seguono.

Problema. — *Data una retta, e su di essa un punto, determinare un secondo punto della retta, che disti da quello di una lunghezza assegnata.* Sia P (Fig. 24 - Tav. IV) il punto sulla retta r, e sia AB il segmento di lunghezza data. Si congiunga p. es. A con P, si traccino per P la parallela ad AB, per B la parallela ad AP. Il segmento PD sarà eguale e parallelo ad AB. Nel cerchio fondamentale si costruisca il diametro MOM' parallelo a PD e il diametro NON' parallelo alla r. Sia allora S il punto comune alle PO, DM'. Le rette SN, SN' incontrano la r in due punti E ed F, che rispondono al

problema; ciascuno dei segmenti PE, PF sta al raggio del cerchio fondamentale, come PS ad OS, cioè come PD al raggio.

Problema. — *Dato un punto, e per esso una retta, determinare una seconda retta per quel punto, che faccia colla prima un angolo eguale ad un angolo dato.* Sia r (Fig. 25 - Tav. IV) la retta data per il punto P, e sia ABC l' angolo dato. Nel cerchio fondamentale si costruiscano i due raggi OM, ON rispettivamente paralleli alle rette BA, BC, ed il raggio OH parallelo alla r. Si tracci la corda ME parallela alla NH e la NF parallela alla MH. I due raggi OE, OF fanno colla OH due angoli eguali ad MON, epperò le rette condotte per P parallelamente a questi raggi, rispondono al problema.

Problema. — *Date due rette che si incontrano, determinare le bisettrici dei loro angoli.* Nel cerchio fondamentale si conducano i diametri paralleli alle rette date, e si congiungano due a due i loro estremi. Queste congiungenti sono parallele alle bisettrici domandate.

§ 5. **Costruzioni colla riga a due orli paralleli: primo modo di usare l' istrumento.** — La riga a due orli paralleli permette di tracciare quante si vogliano coppie di rette parallele, distanti l' una dall' altra di una lunghezza λ eguale alla larghezza della riga a due orli. Essa può quindi essere adoperata anzitutto (oltrechè come una semplice riga) per effettuare la costruzione fondamentale di *condurre una parallela ad una retta data ad una distanza uguale alla larghezza della riga.* Così essa stessa ci fornisce sul foglio gli *enti metrici fondamentali* e quindi *può risolvere tutti i problemi di primo grado grafici e metrici, più alcuni problemi di secondo grado.*

È chiaro che colla riga a due orli si possono tracciare quante si vogliono *losanghe*, e che in ciascuna losanga le diagonali sono ortogonali. Talchè si potrà

sempre costruire il *parallelogramma fondamentale*, e si potranno sempre tracciare le *due coppie fondamentali di rette ortogonali.*

Sebbene ciò sia sufficiente a mostrare come si risolvano colla riga a due orli tutti i problemi metrici di primo grado, diamo tuttavia qualche esempio delle semplificazioni che, nella pratica, l' uso dell' istrumento suggerisce. Gli esempi sono offerti dai tre problemi seguenti:

Problema. — *Determinare un segmento* m-*uplo di un segmento dato* AB. Il segmento dato sia dapprima maggiore della larghezza λ della riga a due orli. Si disponga la riga con un orlo per A e l' altro orlo per B, e si tracci la retta BC (Fig. 27 - Tav. IV); si appoggi poscia la riga alla retta BC, esteriormente al segmento dato, e si tracci la retta DE. Così proseguendo, sul prolungamento della AB si verranno a staccare altrettanti segmenti eguali ad AB.

Se poi il segmento fosse minore di λ, la costruzione più semplice è sempre quella che abbiamo esposta al § 3.

Problema. — *Costruire l' angolo* n-*uplo di un angolo dato* ABC. Appoggiando la riga con un orlo alla BC si descriva la parallela MP (Fig. 28 - Tav. IV). Se è P il suo punto d' incontro col lato BA si disponga la riga con un orlo per B e l'altro per P; tracciata cosi la BD, l' angolo DBC sarà doppio del dato. E ripetendo la costruzione si perverrà all' angolo n-uplo.

Problema. — *Da un punto* P *di una retta* r, *innalzare la perpendicolare a questa retta.* Converrà segnare sulla retta due punti M ed N equidistanti da P, e costruire la losanga avente per diagonale MN; l' altra diagonale è la perpendicolare richiesta.

Vediamo ora qual partito si può trarre dalla costruzione fondamentale consistente nel condurre una parallela ad una retta data distante da essa della lunghezza della riga, per la risoluzione di una intiera *classe di problemi di 2.° grado.*

La costruzione suindicata permette di risolvere il

Problema. — *Determinare le bisettrici degli angoli di due rette date.*

Basta infatti tracciare colla riga a due orli le rette che distano dalle date della lunghezza λ, e condurre le diagonali della losanga così costrutta.

Di qui discende subito la risoluzione del

Problema. — *Trasportare un segmento dato da una retta data ad un' altra* (non parallela alla prima).

Basta invero condurre per gli estremi del segmento le parallele ad una delle bisettrici delle rette date.

Osservazione. — Il problema qui risoluto, a differenza di quello relativo al caso del trasporto parallelo d' un segmento che è lineare (cfr § 3.), è di 2.° grado. Esso permette anzi la risoluzione di una intera classe di problemi di 2.° grado (che però non li comprende *tutti*) abbracciante tutti i problemi risolubili colla riga a due orli adoperata per effettuare la costruzione fondamentale sopra indicata (primo e più immediato modo di usare la riga a due orli). Questa classe di problemi che si può anche considerare corrispondente all'uso dello strumento *trasportatore dei segmenti* è stata completamente determinata dall' Hilbert (cfr. art. 10).

È anche chiaro infatti che la riga a due orli adoperata soltanto nel modo indicato (per costruire una parallela alla distanza λ ad una retta data) non dà nulla di più del trasportatore di segmenti, perchè con quest' ultimo istrumento si effettua subito la detta costruzione fondamentale.

§ 6. **La riga a due orli come sostituto del compasso.** — Esiste tuttavia un secondo modo di usare la riga a due orli (eseguendo un' operazione di scorrimento di essa) in guisa da risolvere *tutti* i problemi di 2.° grado sostituendo intieramente l' uso del compasso.

Basta perciò (§ 4) mostrare come, colla riga a due orli, si possano determinare le intersezioni di una retta data con un cerchio fondamentale, sebbene questo cerchio nel caso presente non venga tracciato sul foglio.

Prendiamo come cerchio fondamentale il cerchio che ha per centro un punto qualunque O del foglio, e per raggio la larghezza λ della riga a due orli; potremo sempre con questa riga tracciare quante si vogliano tangenti a quel cerchio: e precisamente se è P un punto esterno al medesimo, appoggiando (nei due modi) un orlo della riga ad O ed un orlo a P, potremo tracciare le due tangenti al cerchio, passanti per P. Indicheremo questo cerchio con γ. Noi dunque mostreremo come si possano sempre determinare le intersezioni di una retta data col cerchio γ, quando si faccia uso della riga a due orli. E rimarrà con ciò dimostrato che *tutti i problemi di secondo grado e quindi tutti i problemi risolubili elementarmente, si possono risolvere col solo uso della riga a due orli.*

Sia O il centro di γ ed r la retta data (Fig. 26 - Tav. VI). Dal punto O si abbassi la perpendicolare OA alla r; ed il problema proposto consisterà ora nel ricercare sulla OA un punto tale, che le tangenti condotte per esso al cerchio, abbiano il punto di contatto sulla r.

Si scelga sulla r un punto P qualunque (sufficientemente lontano da O); da esso si conduca una tangente al cerchio γ; e si determini su questa il punto di contatto T. La perpendicolare calata da T sulla PO incontra la retta OA in un punto Q, che è il punto cercato. Indichiamo infatti con M il punto in cui si intersecano le PO, TQ, e con N il punto in cui si intersecano le rette r, AO. I quattro punti P, Q, M, N stanno sopra una medesima circonferenza, onde:

$$OM \,.\, OP = ON \,.\, OQ\,;$$

e ciò significa che la media proporzionale fra OM ed OP (cioè il raggio OT) è eguale alla media proporziale fra ON ed OQ. Se adunque si costruisce il triangolo rettangolo che ha per ipotenusa OQ e che ha il vertice V dell' angolo retto sulla r, il suo cateto OV sarà eguale ad OT, e l' altro cateto QV sarà tangente al cerchio γ nel punto V. Viceversa se da Q si conduce una tangente al cerchio, il suo punto di contatto è il suo punto d' incontro colla r.

Riferiamo ora [1] una soluzione del problema: *determinare le intersezioni di una retta data con un cerchio di centro assegnato e di raggio assegnato,* nella quale non si fa uso del cerchio γ che ci ha servito per pervenire al risultato più sopra dichiarato.

Sia M il centro del cerchio dato (Fig. 29 - Tav. IV) ed a la retta data. Se il raggio dato non è già parallelo alla a, converrà disporlo parallelamente a questa retta, in MN (ciò che si farà facilmente bisecando l' angolo del raggio dato con la direzione MN, ed abbassando dall' estremo del raggio la perpendicolare sulla bisettrice). La distanza d della retta a dal centro M, non sarà in generale eguale alla larghezza λ della riga a due orli: si descriva dunque la retta a' parallela ad a e distante di λ dal centro M, e si cerchino le intersezioni della a' col cerchio (di centro M) il cui raggio x soddisfi alla proporzione:

$$x : MN = \lambda : d.$$

Questo raggio x si trova facilmente mediante una trasversale qualunque MH e mediante i triangoli simili $MH'N'$, MHN. Si disponga dunque (nei due modi) la riga a due orli con un orlo per M e l' altro per N'; si costrurranno così le due losanghe $MN'P_1'Q_1'$, $MN'P_2'Q_2'$,

---

[1] Adler, *l. c.*

e i punti $Q_1' Q_2'$ saranno i punti d'incontro della a' col cerchio di raggio MN'.

I raggi MQ_1', MQ_2' daranno sulla a i punti Q_1, Q_2 che evidentemente appartengono alla retta a e al cerchio di raggio MN.

Infine notiamo che l'altro problema: *Determinare le intersezioni di due cerchi dati*, si può ridurre al precedente [1] facendo uso della riga a due orli, senza valersi del cerchio γ. Siano infatti OM, $O'M'$ i due raggi dati (Fig. 30 - Tav. IV), che disporremo perpendicolarmente alla OO', in OA, $O'A'$: basterà per ciò bisecare l'angolo MOA e abbassare da M la perpendicolare alla bisettrice, ecc.

Si tracceranno quindi le rette AB, $A'B'$ parallelamente alla OO', talchè si avrà

$$O'B = OM, \quad OB' = O'M'.$$

Innalzando dal punto di mezzo del segmento BB' la perpendicolare a questo segmento, si otterrà sulla OO' il punto C, il quale apparterrà all'asse radicale dei due cerchi: infatti esso dista egualmente da B e da B', e però si ha la eguaglianza:

$$\overline{OC}^2 + \overline{OB'}^2 = \overline{O'C}^2 + \overline{O'B}^2$$

cioè

$$\overline{OC}^2 - OM^2 = \overline{O'C}^2 - \overline{O'M'}^2 .$$

Innalzando dunque da C la perpendicolare alla OO' si ha l'asse radicale dei due cerchi.

§ 7. **Costruzioni colla squadra e colla falsa squadra.** — Vediamo finalmente *come si possano risolvere tutti i problemi risolubili elementarmente, quando non sia assegnato alcun ente fondamentale sul foglio del disegno, ma si possa far uso della squadra o della falsa squadra.*

---

[1] ADLER, *l. c.*

La *falsa squadra* non è altro che un angolo di ampiezza data σ, che può essere di 90°, nel qual caso si ha la ordinaria *squadra*. La falsa squadra (o la squadra) può essere adoperata anzitutto come una semplice riga. Ma essa medesima ci fornisce sul foglio gli *enti metrici fondamentali*, e quindi *ci permette di risolvere tutti i problemi di primo grado grafici e metrici*. Vedremo inoltre come con la falsa squadra (o con la squadra) si possano *determinare le intersezioni di una retta data con un cerchio dato ma non descritto*, e ciò porterà a concludere altresì che *la squadra o la falsa squadra permettono di risolvere tutti i problemi metrici di secondo grado*.

Per *costruire una parallela ad una retta data AB*, converrà descrivere una retta CD che faccia colla AB un angolo σ, e una seconda retta EF che faccia colla CD un angolo pure eguale a σ, alterno col precedente. E si può dunque costruire immediatamente il *parallelogramma fondamentale*.

Per *costruire una perpendicolare ad una retta data AB*, si assumano sulla AB due punti arbitrari M, N e si descrivano gli angoli EMN, ENM, FMN, FNM eguali a σ. La retta EF sarà perpendicolare alla AB. E si possono quindi costruire quante si vogliano *coppie di rette perpendicolari*.

Se $\sigma = 90°$, quest' ultima costruzione si rende inutile (ed illusoria).

Quanto alla *determinazione delle intersezioni di una retta data con un cerchio assegnato e di raggio assegnato*, essa si otterrà immediatamente nel modo che esponiamo. Se OM è il raggio dato (Fig. 31 - Tav. IV), ed O il centro, si costruisca mediante l'angolo σ una losanga avente per lato OM. L' angolo al centro NOM è uguale a 2σ; e l' arco di cerchio capace dell' angolo σ e costruito sulla corda MN dalla stessa banda del pnnto O, è appunto un arco del cerchio dato. La parte rimanente del cer-

chio è pure un arco capace dell'angolo σ, e per costruirlo si può servirsi di una seconda losanga eguale e contigua alla precedente, od anche, più comodamente, di una terza. Si vogliano ora determinare i punti d'intersezione di una retta r colla circonferenza: basterà fare scorrere il vertice della falsa squadra sulla r, in modo che un orlo passi p. es. per N, finchè l'altro orlo passi per M; ecc. Se, $\sigma = 90.°$, la losanga non si può costruire; in questo caso converrà determinare, colle note costruzioni lineari, il punto M' diametralmente opposte ad M, e fare scorrere il vertice della squadra su r in modo che un orlo passi per M, finchè l'altro passi per M'.

Il problema: *Dati i centri ed i raggi di due cerchi determinare le loro intersezioni*, si ridurrà al precedente nel modo indicato al § 6, od anche colla costruzione seguente:

Siano OM, $O'M'$ i due raggi dati. Se già non sono paralleli, si costruisca per O' (mediante una losanga di lato $O'M'$) un raggio eguale ad $O'M'$ e parallelo ad OM. I due raggi paralleli bastano per determinare sulla OO' il centro di omotetia S, dal quale condurremo, oltre la SM, un' altra trasversale SN. I punti d'intersezione di queste due trasversali si determineranno colla costruzione del problema precedente; e serviranno a costrurre colla sola riga l'asse radicale dei due cerchi.

L'uso della falsa squadra può in pratica semplificare alcune costruzioni. E noi ci limiteremo a qualche esempio.

Problema. — *Bisecare un angolo dato ABC.* Assumiamo sul lato BC un punto qualunque M (Fig. 32 - Tav. IV), e si cerchi sul lato BA un punto N tale che BN sia eguale a BM: basterà costruire coll'angolo σ una losanga $BMPQ$ e fare scorrere il vertice della squadra lungo BA in modo che un orlo passi per Q, finchè l'altro venga a passare per M. Trovato così il punto N, si descrivano

gli angoli ANH, CMH eguali a σ. La retta BH sarà la bisettrice richiesta.

Problema. — *Raddoppiare un angolo dato.* Sia ABC quest' angolo (Fig. 33 - Tav. IV). Si scelga un punto M sul lato BA (o sul suo prolungamento, secondo che l' angolo dato è minore o maggiore di σ), e si descriva l' angolo $AMD = \sigma$; si faccia scorrere la falsa squadra lungo BA finchè l' altro bordo passi per D, e si costruisca così l' angolo $DEM = \sigma$. I punti M ed E ci permettono di completare la losanga $MDED'$, e l' angolo DBD' sarà doppio dell' angolo dato.

Ripetendo la costruzione più volte, si potrà costruíre l' angolo n-plo dell' angolo dato.

Osservazione. — Quando per la squadra o per la falsa squadra si volessero distinguere (come per la riga a due orli) due modi di usare l' istrumento, il primo e più immediato modo capace di fornire il *trasporto d' un angolo di data ampiezza* fornirebbe soltanto la risoluzione dei problemi metrici di 1.° grado (cfr. § 3); invero l' operazione più complessa consistente nel fare scorrere lo istrumento, compare necessariamente anche nel problema citato della bisezione dell' angolo.

ARTICOLO DECIMO

« **Sulla risolubilità dei problemi geometrici cogli istrumenti elementari: contributo della geometria analitica** » di GUIDO CASTELNUOVO a Roma [1].

Nel corso del secolo l'interesse dei geometri fu più volte attratto dall'esame della possibilità di risolvere una determinata classe di problemi geometrici, algebrici, od analitici con mezzi prestabiliti.

La importanza di siffatte ricerche fu ampiamente dimostrata dalle risposte esaurienti che furon date a questioni, che da lungo tempo avevano invano affaticato la mente degli scienziati più insigni.

Fu l'algebra che per prima entrò in quest'ordine di idee, collo studio delle equazioni risolubili per radicali. Le scoperte di cui si arricchì la teoria delle equazioni per merito di GAUSS, ABEL, e sopra tutti di GALOIS, gettarono viva luce sopra i rami più svariati delle mate-

---

[1] In questo articolo il prof. CASTELNUOVO ha gentilmente acconsentito ad esporre, pei nostri *Collectanea*, alcuni argomenti accennati all'Università di Roma, nelle sue lezioni di geometria proiettiva e analitica, che presto speriamo di vedere interamente pubblicate.

(*Nota di* F. E.)

matiche. E la stessa geometria elementare, che era rimasta quasi immobile al punto in cui l'avevano portata i geometri greci, risentì il contraccolpo dei progressi dell'algebra. Ricorrendo infatti al sussidio della geometria analitica, si ripresero in esame alcuni problemi famosi che sempre aspettavano una soluzione, e si mostrò in modo sicuro come fosse inutile cercarla per la via battuta fino allora, poichè quei problemi non erano risolubili cogli strumenti tradizionali riga e compasso. E si riuscì d'altra parte a risolvere coi mezzi della geometria elementare altri problemi (iscrizione nel cerchio di certi poligoni regolari), che i geometri greci certamente ritenevano insolubili.

È merito adunque di due scienze riunite, l'algebra e la geometria analitica, di aver chiuso in modo definitivo dopo venti secoli di ricerche, la questione della risolubilità dei problemi geometrici mediante la riga ed il compasso.

L'esame dei problemi geometrici che si possono risolvere colla riga e col compasso, o più generalmente con determinati strumenti, comporta appunto due stadi, l'uno di pertinenza della geometria analitica, l'altro dell'algebra (o dell'analisi). Infatti occorre esaminare anzitutto quale effetto produca sopra una figura geometrica una costruzione eseguita mediante un determinato strumento. E poichè, col mezzo della geometria analitica, ogni operazione geometrica trova riscontro in una operazione analitica, si dovrà ricercare *quale sia la operazione analitica a cui equivale una costruzione eseguita con un determinato strumento* (*riga*, *compasso....*). Poi, quando si sia risposto a questa prima questione, rimane da fare un'altra ricerca, che appartiene all'algebra o all'analisi; si tratta di esaminare se *ciascuna delle equazioni a cui conduce un problema proposto*, trattato colla geometria analitica, *si possa risolvere colla detta operazione analitica,*

applicata una o più volte; giacchè questa evidentemente è condizione necessaria e sufficiente affinchè il problema geometrico sia risolubile collo strumento prefisso. Ora delle due questioni qui proposte, la prima non presenta, a prima vista, nessuna difficoltà, mentre la seconda può esigere il soccorso delle teorie analitiche più elevate. Ciò spiega perchè tutti gli scrittori [1] che si occuparono dell' argomento qui trattato, siano stati attratti dal problema algebrico, e si siano limitati, per quanto riguarda la parte geometrica, ad enunciare un risultato che sembra evidente « la riga permette di risolvere ogni » problema geometrico che dipenda da una o più equa- » zioni di primo grado; il compasso, aggiunto alla riga, » dà la risoluzione dei problemi che dipendono da equa- » zioni di secondo grado, od anche da equazioni di grado » superiore, le quali però siano risolubili mediante riso- » luzione di successive equazioni quadratiche ».

Ora quando si esamini attentamente questo enunciato, si scorge che esso presuppone una serie di nozioni sottintese e mal precisate, trascurando le quali sarebbe facile cadere in errori grossolani. D' altra parte quelle nozioni si riattaccano così strettamente ad una teoria importantissima dell' algebra moderna, la teoria dei *campi di razionalità*, che val la pena di esporle in modo diffuso.

È appunto quello che io mi propongo di fare nel presente articolo. Trattandosi di argomento elementare, cercherò che elementare sia pure l' esposizione; non supporrò noti perciò nel lettore che i principî della geometria elementare e qualche nozione semplicissima di geometria proiettiva. Anzi per ridurre al minimo le

---

[1] Citerò, tra i più noti, i due libri del PETERSEN: *Metodi e teorie per la risoluzione dei problemi* e *Teoria delle equazioni algebriche*, e l' opuscolo del KLEIN: *Conferenze sopra alcune questioni di geometria élementare.*

cognizioni di quest' ultima scienza di cui si abbisogna, tratterò varie questioni sotto forma metrica per dedurre poi, col mezzo della proiezione centrale, risultati proiettivi, seguendo così una via che non è la migliore sotto l' aspetto teorico, ma è certo preferibile dal punto di vista didattico. Quanto all' ordine tenuto in questo articolo, dirò che tratto, in una prima parte, della *Geometria della riga*, occupandomi anzitutto delle costruzioni sopra una retta data tracciata in un piano ausiliario, il quale serve solo per le operazioni grafiche, poi delle costruzioni sopra un piano dato. In una seconda parte studio le costruzioni mediante *riga e compasso*, ed accenno a qualche strumento che può in parte o in tutto sostituire quest' ultimo.

Avverto ancora che ricercando un metodo *generale,* il quale permetta di risolvere con determinati strumenti ogni problema risolubile con quei mezzi, debbo necessariamente trascurare la semplicità e la eleganza della costruzione; doti queste che si possono raggiungere solo coll' esaminare uno alla volta i problemi da risolvere.

I

§ 1. **Operazioni che possono eseguirsi mediante la riga sui segmenti di una retta.** — Premetto una osservazione semplicissima che serve a giustificare le costruzioni seguenti.

Siano r, s due rette parallele [1]; sopra una di queste s si fissi un segmento arbitrario, e lo si proietti sopra r da due punti distinti T, T'. Si otterranno così

---

[1] Il lettore è pregato di tracciare le figure, tutte semplici, di cui si parla in questo articolo.

due segmenti di r. Ora si dimostra subito che *il rapporto tra i due segmenti proiezioni non dipende dal segmento scelto sopra s,* ma dipende solo dalla posizione dei centri di proiezione T, T' (è precisamente uguale alla espressione $\frac{Tr}{Ts} : \frac{T'r}{T's}$, dove Tr indica la distanza di T dalla retta r ecc.) In particolare i due segmenti proiezioni risultano uguali, se la retta TT' che congiunge i due centri è parallela ad r ed s.

Ciò premesso, partiamo da una retta r sulla quale vogliamo eseguire alcune costruzioni, servendoci di un piano ausiliario passante per essa. Occupandoci per ora di operazioni metriche sopra i segmenti di r, sarà indispensabile adoperare il punto all'infinito della retta r. Per definire graficamente questo punto, supporremo tracciato nel nostro piano una retta ausiliaria s parallela ad r. Sappiamo allora [1] che è possibile costruire nel piano, *mediante la sola riga*, la retta che passa per un punto dato ed è parallela ad r. Anzi noi dobbiamo riguardare una siffatta costruzione come equivalente a quella, mediante cui si congiunge un punto del piano con un punto qualsiasi di r.

Partendo da questa osservazione, noi siamo in grado di risolvere alcuni problemi fondamentali, valendoci della sola riga e della retta ausiliaria s parallela alla retta data r.

1) *Dato un segmento AB sopra r, costruire sulla r un segmento $A'B' = AB$, di cui un estremo A' o B' cada in un punto assegnato.*

Si assuma ad arbitrio, fuori di r e di s, un punto ausiliario T, per cui si conduca la retta t parallela ad r ed s, e sia T' un nuovo punto di t. Ora si proietti il

---

[1] Vedi art. 9.

segmento AB da T sopra s in A_0B_0, e poi si proietti di nuovo A_0B_0 da T' sopra r in $A'B'$. Sarà allora

$$A'B' = AB.$$

È chiaro inoltre che si potrà sempre fissare il punto T' sopra t in guisa che A' oppure B' sia un punto prefisso di r.

2) *Dati due segmenti sopra r, costruire un terzo segmento che sia uguale alla loro somma o alla loro differenza.* Basta applicare la costruzione 1) al secondo segmento dato.

In generale dati sopra r più segmenti, i cui valori (rispetto ad una data unità di lungezza, e tenuto conto del verso positivo scelto su r) indicheremo con $a, b, c \ldots$, si potrà costruire sopra r un segmento di lunghezza $x = \pm a \pm b \pm c \pm \ldots$; (in particolare $x = na$ per n intero); si potrà dunque eseguire l' *addizione algebrica dei segmenti.*

3) *Dati sopra r tre segmenti, costruirvi un segmento che sia quarto proporzionale dopo quelli.*

Siano AB, $A'B'$, CD i tre segmenti. Scelto, come sopra, il punto ausiliario T, si proiettino da questo i segmenti AB e CD sulla retta s: indichiamo con A_0B_0 e C_0D_0 le proiezioni. Si costruisca ora quel punto T' da cui A_0B_0 vien proiettato iu $A'B'$; dallo stesso punto il segmento C_0D_0 verrà proiettato in un segmento $C'D'$ di r, tale che

$$AB : A'B' = CD : C'D'.$$

Detti a, b, c, x i valori dei quattro segmenti, rispetto ad una unità di lunghezza arbitraria, sarà $x = \frac{bc}{a}$; e quindi se il primo segmento si sceglie come unità ($a = 1$), allora $x = bc$; se invece il terzo segmento si seglie come unità ($c = 1$), allora $x = \frac{b}{a}$. Ne viene che la operazione

3) può considerarsi, secondo i casi, come *moltiplicazione* o *divisione* dei segmenti, ricordando che il risultato dipende dall' unità di misura, a differenza di ciò che succede nell' addizione.

Si osservi inoltre che se $b = na$, dove n è intero, (operazione 2)) si ottiene $x = \frac{c}{n}$, risultato indipendente dall' unità di lunghezza e dal valore di a; ricorrendo ancora all' operazione 2), si può adunque costruire, dato il segmento c, un segmento di valore $x = \frac{m}{n} c$, dove m ed n sono due numeri interi.

In breve, dati sopra una retta più segmenti, noi possiamo, mediante costruzioni geometriche della specie indicata, seguire graficamente ogni serie di operazioni *razionali* (addizione algebrica, moltiplicazione algebrica) in numero finito che venga eseguita sui valori dei segmenti; possiamo costruire ogni espressione razionale formata coi valori dei dati segmenti. Volendo enunciare in forma più precisa il resultato, diremo:

Siano dati sopra una retta uno o più segmenti (in numero finito), uno dei quali si assume come unità di lunghezza, mentre gli altri, se esistono, avranno certi valori $a, b, c \ldots$; *sia tracciata inoltre una parallela alla retta primitiva. Allora si può, servendosi della sola riga, costruire sulla prima retta ogni segmento, il cui valore si ottenga mediante operazioni razionali applicate alle quantità* 1, $a, b, c \ldots$ [1].

---

[1] L' aver scelto uno dei segmenti dati come unità di lunghezza ci permette di costruire *ogni* espressione $x = R(a, b, c \ldots)$, dove R è simbolo di funzione razionale a coefficienti razionali, senza badare alla condizione di *omogeneità* che si presenta invece quando la unità di lunghezza è scelta diversamente. Ecco in che consiste la detta condizione. Misuriamo i segmenti che sinora avevano i valori 1, $a, b, c \ldots$, x con una nuova

La costruzione si eseguisce sopra un piano ausiliario, del quále si adoperano due elementi ausiliari (tutti gli altri rimanendo determinati da questi e dai dati): precisamente la parallela suddetta ed un punto T fuori di questa e della retta data.

§ 2. **Digressione relativa ai campi di razionalità.** — Noi vogliamo enunciare il nostro resultato sotto altra forma introducendo il concetto moderno, di *campo di razionalità*. Giova perciò fare qui una digressione per fissarne nettamente il senso.

Si dice *campo di razionalità* un insieme di numeri, il quale contenga ogni numero che si possa ottener dai numeri stessi mediante le operazioni razionali (addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione). Il più semplice campo di razionalità è l' insieme di tutti i numeri razionali, *campo assoluto di razionalità*, il quale può riguardarsi come ottenuto dall' unità, operando su questa mediante le operazioni razionali, e perciò si suole indicare con [1]. Ogni altro campo contiene il campo assoluto,

---

unità, e diciamo $\lambda, \alpha, \beta, \gamma \ldots, \xi$ i nuovi valori dei segmenti stessi; sarà allora

$$a = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad b = \frac{\beta}{\lambda}, \quad \text{ecc.}$$

L' antica espressione da costruire diventa con ciò

$$\frac{\xi}{\lambda} = R\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, \frac{\gamma}{\lambda} \ldots\right);$$

e quindi

$$\xi = \lambda R\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, \frac{\gamma}{\lambda} \ldots\right)$$

sarà il valore del segmento richiesto, espresso mediante una *funzione razionale ed omogenea, col grado di omogeneità* 1, delle quantità date $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$. Ciò si verifica subito notando che se le dette quantità vengono moltiplicate per un parametro arbitrario t, tutto il secondo membro dell' uguaglianza risulta moltiplicato per t^1.

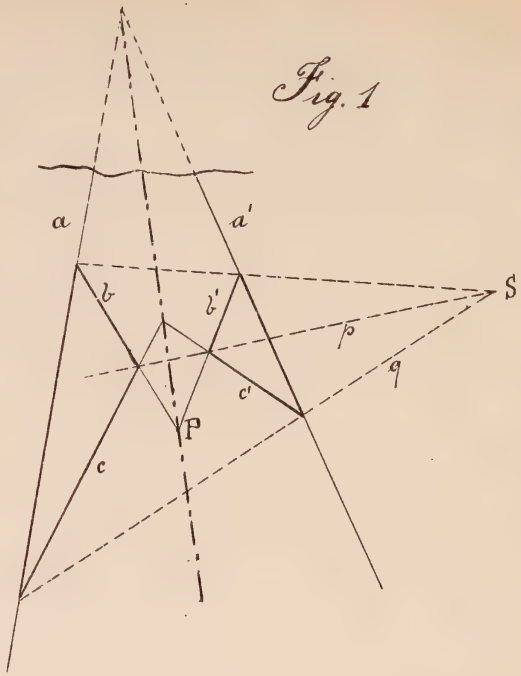


Fig. 1
a
a'
b
b'
S
p
q
c'
P
c

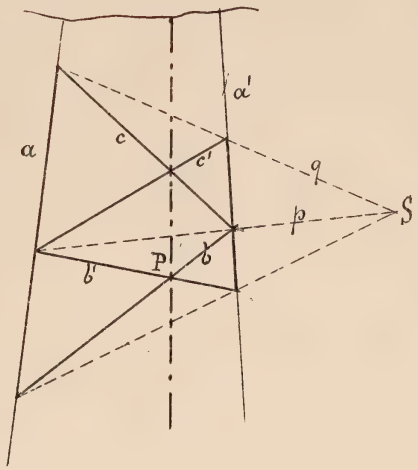


Fig. 2
a'
a
c
c'
q
p
S
P
b
b'

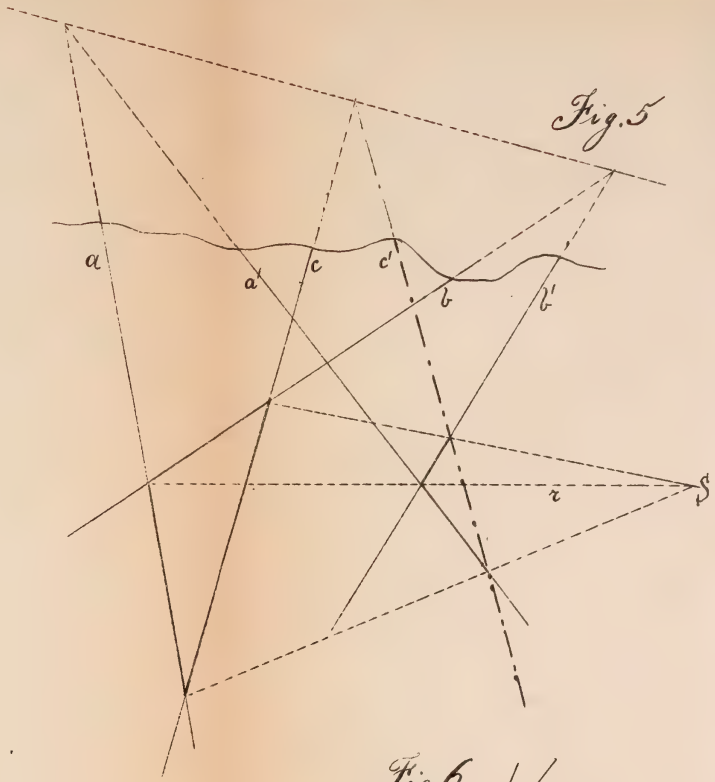


Fig. 5
a
a'
c
c'
b
b'
r
S

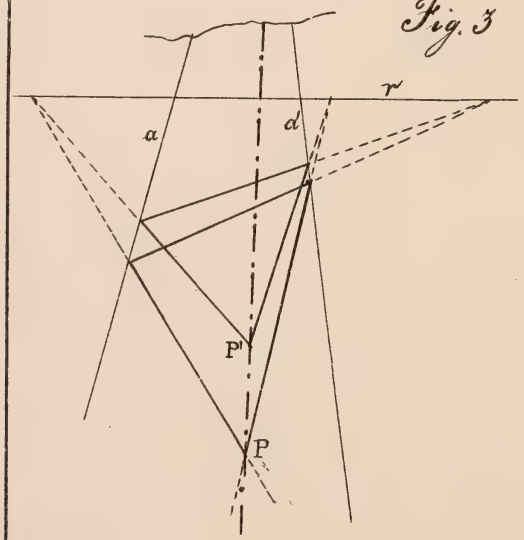


Fig. 3
r
a
a'
P'
P

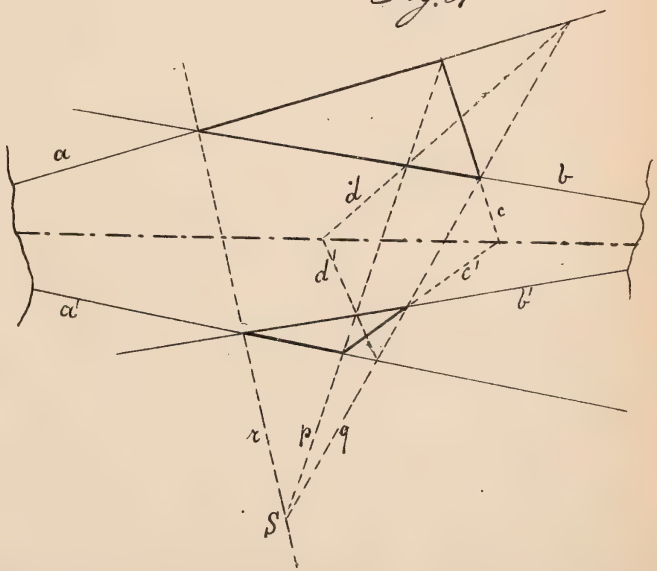


Fig. 4
a
b
d
c
d'
c'
a'
b'
r
p
q
S

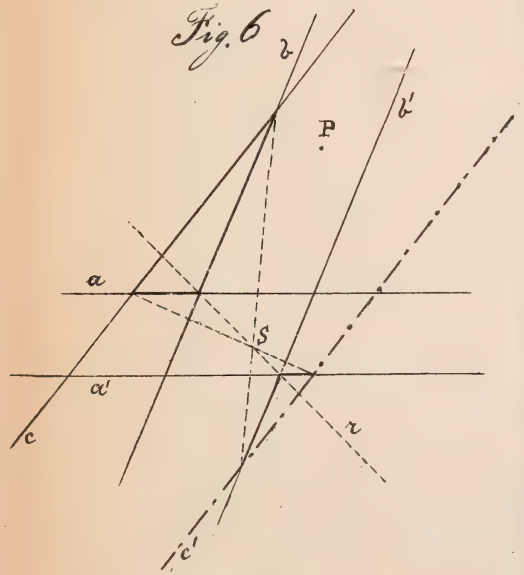


Fig. 6
b
b'
P
a
S
a'
c
r
c'

Tav. I.

Fig 7

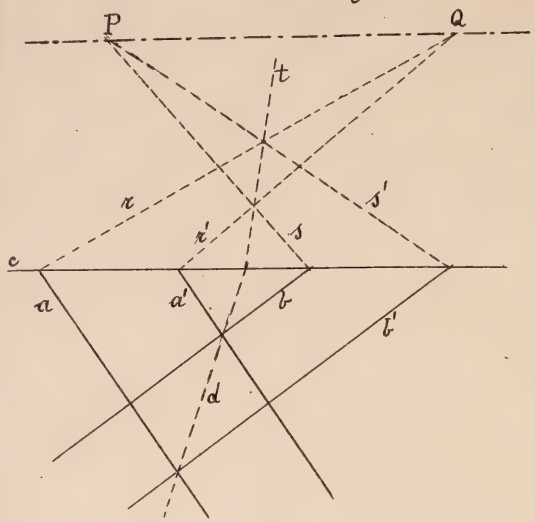


Fig. 8

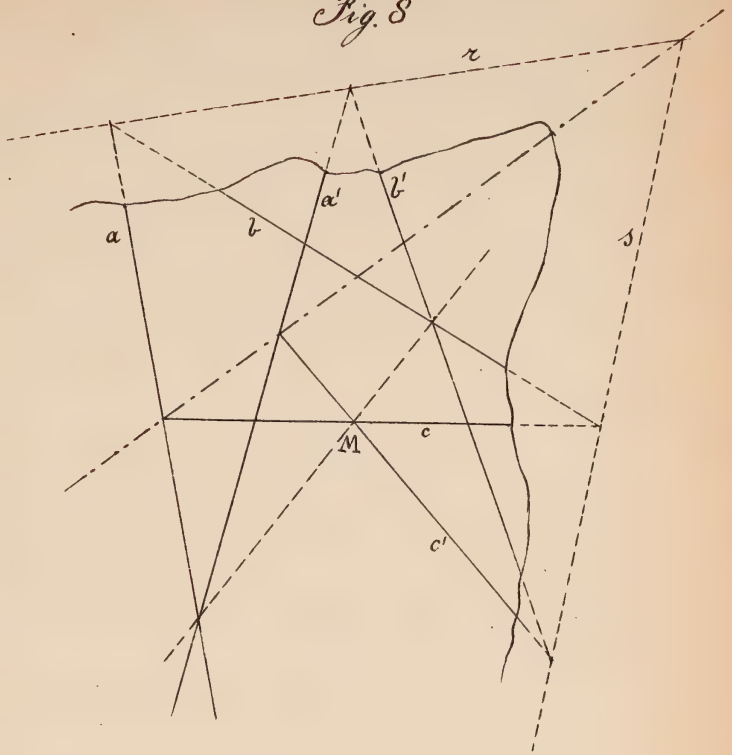


Fig. 11

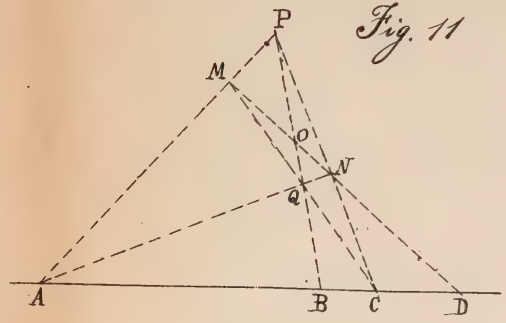


Fig. 12

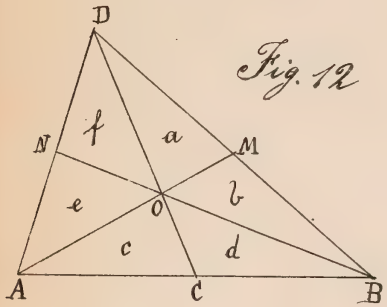


Fig. 9

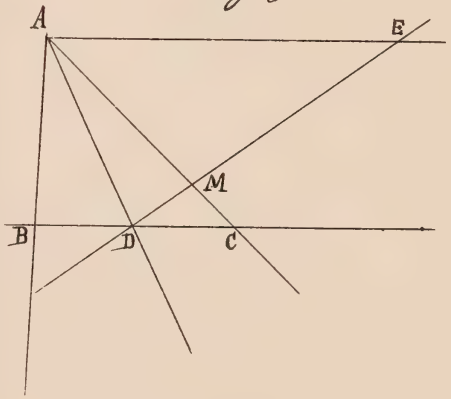


Fig. 10

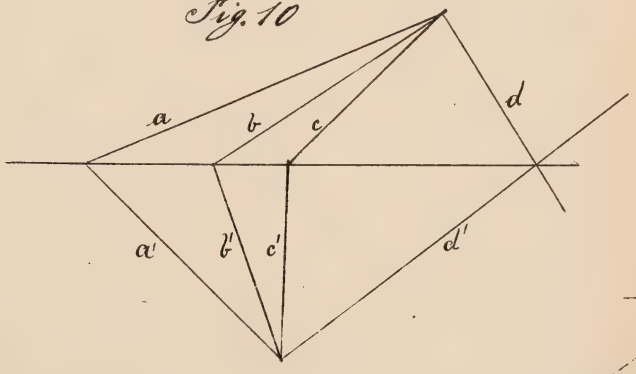
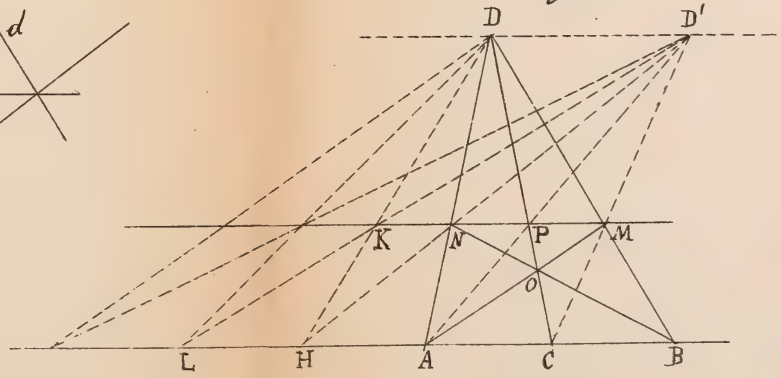


Fig. 13



Tav. II

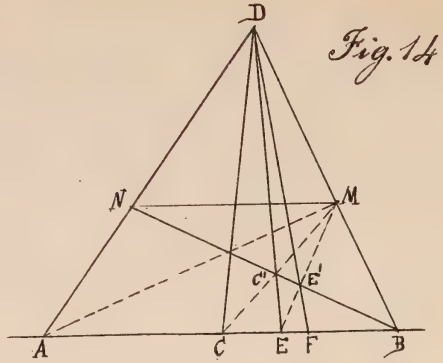


Fig. 14

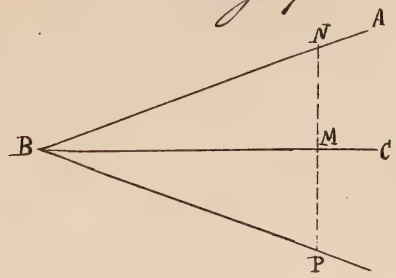


Fig. 17

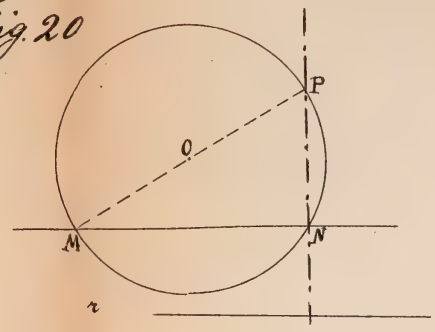


Fig. 20

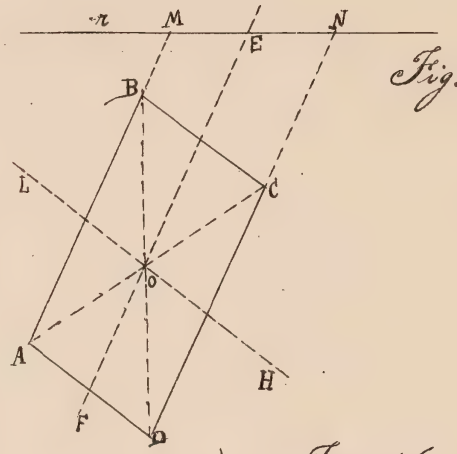


Fig. 15

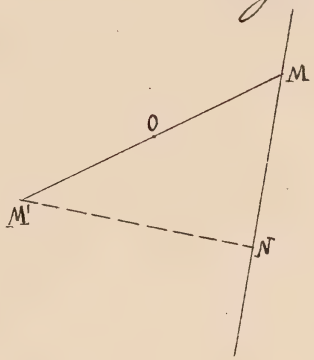


Fig. 18

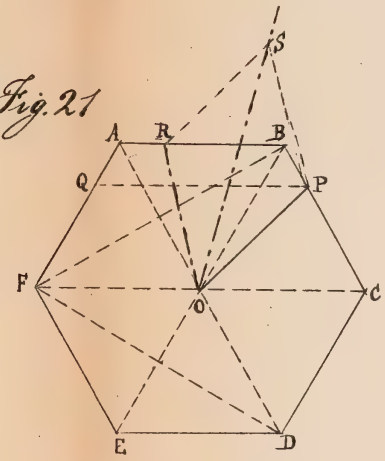


Fig. 21

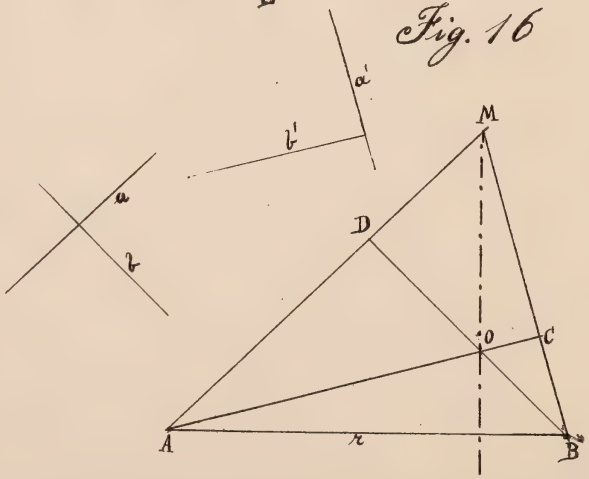


Fig. 16

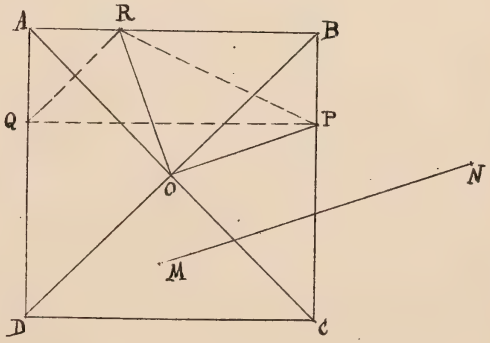


Fig. 19

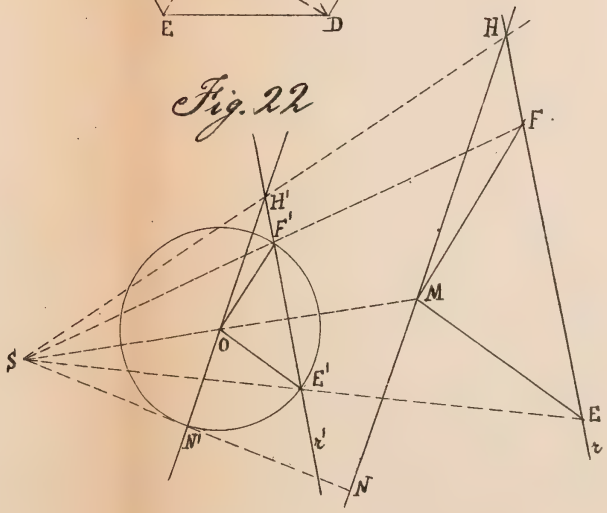


Fig. 22

Tav. III.

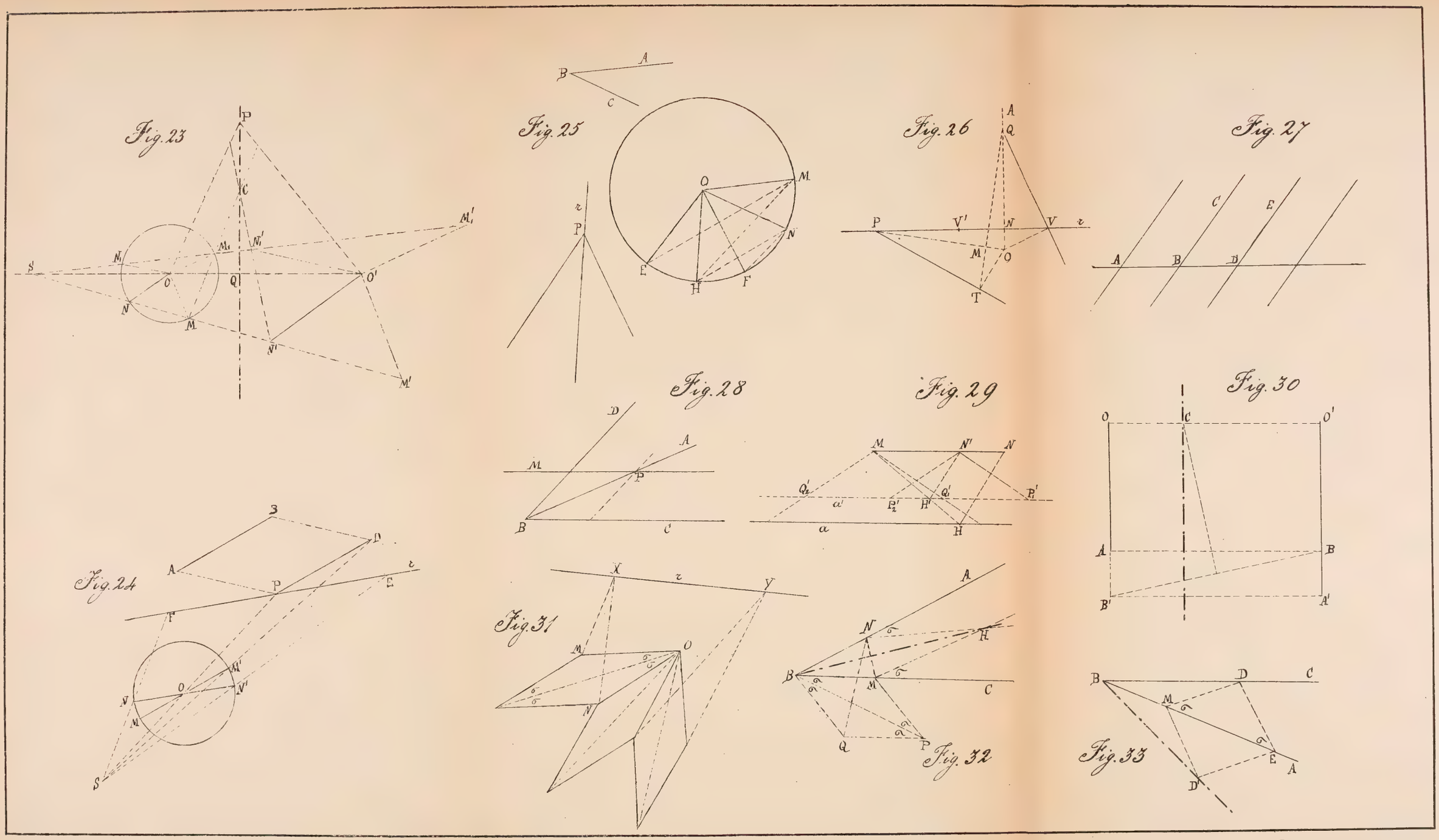


Fig. 23
Fig. 25
Fig. 26
Fig. 27
Fig. 28
Fig. 29
Fig. 30
Fig. 24
Fig. 31
Fig. 32
Fig. 33

Tav. IV.

poichè se il primo campo contiene una quantità a, esso contiene pure $\frac{a}{a} = 1$.

Un campo di razionalità dato *si estende* o *si amplia*, quando ai numeri che lo compongono *si aggreghi* o *si aggiunga* un numero che non ne faccia parte: il nuovo campo conterrà allora tutti i risultati delle operazioni razionali eseguite sopra i numeri del campo primitivo e sopra il numero aggiunto. Così se partiamo dal campo assoluto [1], composto di tutti i numeri razionali, e vi aggiungiamo un irrazionale a, otteniamo un nuovo campo più ampio che potrà indicarsi con $[1, a]$ (od anche con $[a]$). E di qua mediante successive aggiunte, potremo ottenere i campi $[1, a, b]$ (ossia $[a, b]$), ecc.

Perveniamo così al concetto di campo di razionalità definito da una *base* $[1, a, b \ldots.]$ composta di un numero finito di quantità; un siffatto campo è costituito da ogni quantità che si ottenga dalle primitive mediante un numero indeterminato, ma finito, di operazioni razionali. Naturalmente non ogni campo di razionalità possiede una base, come mostra l' esempio del campo formato da tutti i numeri reali (razionali e irrazionali).

Giova notare pel seguito che un campo di razionalità definito da una base $[1, a, b \ldots.]$ può ampliarsi, non soltanto mediante l'aggiunta di una quantità estranea al campo, ma pure mediante *l' aggiunta di una determinata operazione irrazionale* Ω; intendendosi allora che il nuovo campo è formato da ogni quantità che si ottenga dalle quantità date $1, a, b \ldots.$, mediante un numero indeterminato, ma finito, di operazioni razionali e di operazioni Ω. Così appunto nel seguito dovremo considerare il caso che Ω sia la estrazione di radice quadrata.

Avvertiamo infine, tornando alla definizione di campo di razionalità, che in certe questioni occorre distinguere, tra le quantità che definiscono un campo, quelle che

che hanno un valor numerico fisso *(numeri)*, e quelle che nel corso della questione possono assumere valori arbitrari *(parametri)*. Allora ogni elemento del campo o è un nuovo *numero* appartenente al campo più ristretto definito dai *numeri dati*, oppure è una funzione razionale dei *parametri* avente per coefficienti numeri del campo più ristretto ora nominato. Così se x è un parametro, il campo $[1, x]$ è costituito dai numeri razionali e dalle funzioni razionali di x a coefficienti razionali.

§ 3. **Altre forme dell' enunciato del § 1.** — Riprendiamo ora in esame il resultato del § 1. Approfittando dei concetti esposti nella nostra disgressione, possiamo enunciarlo sotto la forma seguente:

Dati sopra una retta uno o più segmenti, in numero finito, aventi i valori $1, a, b, c \ldots$, *e segnata una parallela alla retta, si può, coll' aiuto della sola riga, costruire sulla retta ogni segmento, il cui valore appartenga al campo di razionalità* $[1, a, b, c \ldots]$.

Supponiamo in particolare che i segmenti dati sopra r abbiano un estremo O comune; allora i numeri (positivi o negativi) $1, a, b, c \ldots$ misurano le distanze degli altri estremi da O, le *ascisse* di quei puuti rispetto alla *origine* O; il punto di ascissa 1 si dirà *punto unità*.

Dunque: *Dati sopra una retta due o più punti, dei quali uno si assume come origine di un sistema di ascisse, un secondo come punto di unità, mentre gli altri avranno le ascisse* $a, b, c \ldots$, *segnata inoltre una retta parallela alla data, si può colla sola riga costruire sulla retta primitiva ogni punto, la cui ascissa appartenga al campo di razionalità* $[1, a, b, c \ldots]$.

§ 4. **Enunciato proiettivo delle operazioni che la riga permette di eseguire sopra una retta.** — Si può rilevare che nelle costruzioni precedenti interviene sempre

l' uso di una retta ausiliaria s parallela alla retta data r. Ora è naturale di chiedere quali costruzioni permetta di eseguir la sola riga, quando si abbandoni l' uso della parallela nominata. Con ciò si viene a far astrazione dal punto all' infinito della retta r, e si passa quindi dalle questioni di natura *metrica* alle questioni di natura *proiettiva*. Non occorre però ritornare sul cammino già percorso per ottenere nuovi risultati, ma basta trasformare il risultato metrico del § 3 mediante il metodo delle proiezioni, per aver subito un risultato proiettivo.

Riprendiamo perciò la retta r sinora considerata, e il piano π per essa, sopra cui si operava. Sia π' un nuovo piano qualsiasi. Proiettiamo ora la figura costruttiva appartenente a π sopra π' da un punto S, che non appartenga nè a π, nè a π'. Otterremo su π' una nuova figura che conterrà tanti punti e rette quante la iniziale; e punti e rette, per quel che riguarda la reciproca posizione, saranno disposti nello stesso modo nelle due figure; colla sola avvertenza che a rette parallele della prima (concorrenti in un punto all' infinito) corrisponderanno generalmente nella seconda figura rette secantisi in un punto proprio. Esaminiamo in particolare che cosa avvenga dei punti di r e dei punti corrispondenti sulla retta proiezione r'. Sopra r era fissato un sistema di ascisse avente una origine O e un punto unità U. Se x è l' ascissa di un punto qualsiasi M di r, sarà

$$x = \frac{OM}{OU}.$$

Ora noi possiamo porre questa espressione sotto forma di *doppio rapporto* (o *rapporto anarmonico*) di quattro punti, purchè introduciamo il punto all' infinito X_∞ della retta r. Infatti è noto che

$$x = \frac{OM}{OU} = (MUOX_\infty) = (X_\infty OUM),$$

dove i simboli in parentesi indicano doppi rapporti dei punti nominati.

Se ora designiamo con X', O', U', M' le proiezioni sopra la retta r' dei punti X_∞, O, U, M di r, avremo per la notissima proprietà del doppio rapporto

$$(X'O'U'M') = x,$$

dove per definizione è

$$(X'O'U'M') = \frac{X'U'}{O'U'} : \frac{X'M'}{O'M'}.$$

Ricordo qui che il doppio rapporto x formato da un punto M', variabile sopra una retta, con tre punti fissi di questa X', O', U', prende il nome di *coordinata proiettiva* di M' rispetto ai *punti fondamentali* X', O', U' (i quali, tenendo conto delle loro coordinate $= \infty, 0, 1$, diconsi ordinatamente punto infinito, punto zero, e punto unità); i tre punti fondamentali possono occupare posizioni arbitrarie sulla retta.

Con ciò abbiamo visto che l'ascissa di un punto generico M di r uguaglia la coordinata proiettiva del punto corrispondente M' di r', riferito a convenienti punti fondamentali. In forma concisa: « un sistema di » coordinate ascisse sopra una retta dà mediante proie- » zione un sistema di coordinate proiettive sopra un'altra » retta »; ed è vera anche l'inversa, purchè si scelga il centro di proiezione in modo conveniente.

La digressione che precede ci permette di trasformar subito l'enunciato del § 3 sotto la seguente forma proiettiva:

Dati sopra una retta tre o più punti, dei quali tre si assumono come punti fondamentali di un sistema di coordinate proiettive, mentre gli altri avranno certe coordinate a, b, c...., *si può, mediante la sola riga, costruire sulla retta ogni altro punto, la cui coordinata appartenga al campo di razionalità* [1, a, b, c....].

Vedremo poi che il teorema, insieme alle proposizioni metriche da cui segue (§§ 1, 3,), può essere invertito.

Naturalmente nella costruzione si dovranno adoperare alcuni elementi ausiliari del piano su cui si opera: ma gli elementi ausiliari possono sempre ridursi ad *una* retta *arbitraria* passante per uno dei punti fondamentali, e ad *un* punto *arbitrario* fuori di questa retta e della retta data, restando poi completamente determinata la costruzione (cfr. § 1). Comunque si operi, del resto, gli elementi ausiliari non lasciano traccia nel risultato, il quale è indipendente da quelli.

§ 5. **Le costruzioni metriche di planimetria eseguibili colla riga quando sia dato un parallelogramma.** — Ora siamo in grado di trattare la questione di geometria piana analoga a quella risolta sulla punteggiata. Seguendo lo stesso ordine, partiremo da considerazioni metriche per giungere poi a un risultato di carattere proiettivo.

Siano date sopra un piano due coppie di rette parallele limitanti un parallelogramma. Indichiamo con O un vertice di questo, con x, y le due rette uscenti da O, con U il vertice del parallelogramma opposto ad O. Possiamo allora stabilire un sistema di coordinate cartesiane, di cui O sia l'*origine*, x ed y gli *assi*, U il *punto unità* (di coordinate 1, 1). Con quest' ultima scelta veniamo a dire che se U_x, U_y sono i due rimanenti vertici del parallelogramma, appartenenti rispettivamente ad x e ad y, noi assumiamo il segmento OU_x come unità di misura delle ascisse (cioè dei segmenti aventi la direzione di x), ed il segmento OU_y come unità di misura delle ordinate (cioè dei segmenti aventi la direzione di y). Le due unità possono essere distinte od uguali; nel primo caso occorre ricordare che due segmenti l' uno sopra x, l' altro sopra y, aventi lo stesso valore *numerico*, non sono *geometricamente*

uguali; nel secondo caso, quando il parallelogramma è equilatero, l'avvertenza non ha più luogo; a questo secondo caso può riferirsi, se crede, il lettore.

Notiamo subito che la retta OU ha l'equazione $x = y$; se da un punto di essa si conducono le parallele ad x, y fino ad incontrare gli assi y, x (operazione che si può eseguire colla sola riga), si ottengono su questi, a partire da O, due segmenti che hanno gli stessi valori. È adunque possibile, dato un segmento sopra x, di costruire colla sola riga un segmento numericamente uguale sopra y; e dato un punto di coordinate a, b, è possibile costruire colla sola riga il punto di coordinate b, a.

Ciò premesso, siano dati nel nostro piano xy il punto U, ed eventualmente altri punti in numero finito; valutiamo le coordinate di tutti questi, ed indichiamone i valori promiscuamente con 1, a, b, c.... Allora noi possiamo costruire colla sola riga, sopra ciascuno dei due assi, punti aventi da O distanze misurate da 1, a, b, c..., rispetto alle unità di misura convenute. Possiamo in conseguenza, in virtù del teorema del § 3, costruire colla sola riga, sopra ciascun asse, un punto la cui distanza da O abbia un valore x, oppure y, appartenente al campo di razionalità $K = [1, a, b, c....]$; e quindi possiamo nel piano costruire il punto (x, y). Dunque:

Dato in un piano un parallelogramma, di cui due lati si assumono come assi ed un vertice come punto unità di un sistema di coordinate cartesiane, dati eventualmente altri punti di cui le coordinate promiscuamente abbiano i valori $a, b, c...$, *si può mediante la sola riga costruire ogni punto del piano, le cui coordinate appartengano al campo di razionalità* $[1, a, b, c....]$.

È lecito adoperare nella costruzione punti ausiliari, ma non è necessario, e basta ricorrere ai dati, giacchè ad es. per la costruzione di un segmento sopra x basta (§ 3) la conoscenza di una retta (lato del parallelogramma)

parallela ad x e di un punto ulteriore (centro del parallelogramma).

Qui è notevole il fatto che il teorema può invertirsi nel seguente modo:

Ogni punto a cui si perviene mediante una costruzione della specie indicata, ha coordinate che appartengono al nominato campo di razionalità K, dal quale sarà dunque impossibile uscire. La dimostrazione si fonda sulle prime nozioni di geometria analitica. Infatti la costruzione si limita a congiungere con una retta due punti dati, o già ottenuti mediante costruzioni anteriori, e a determinare l' intersezione di due rette ottenute nel detto modo. Ora se due punti hanno coordinate appartenenti al nostro campo di razionalità K, la retta congiungente avrà una equazione $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, di cui i coefficienti α, β, γ (o, se si vuole, i loro rapporti) apparterranno al campo stesso; e se due rette $\alpha x + \ldots = 0$, $\alpha' x + \ldots = 0$ hanno coefficienti che appartengono al detto campo, le coordinate x, y del punto comune certo apparterranno al campo stesso. Quindi ecc.

Osservazione. — Nel ragionamento qui fatto si suppone che si operi esclusivamente sui punti dati, senza intervento di elementi estranei. Ma la conclusione vale anche quando nella costruzione si introducano punti *ausiliari*, purchè questi abbiano il vero carattere dei punti *ausiliari*, quello cioè di potersi assumere *ad arbitrio* (sia nel piano, sia sopra rette date), e di *non influire in nessun modo sul risultato della costruzione*, il quale deve essere assolutamente indipendente da quelli. Sia infatti P, di coordinate m, n, un punto ausiliario che si possa prendere o completamente ad arbitrio, o ad arbitrio sopra una retta della figura. E sia (x, y) il punto risultante da una costruzione colla riga, in cui si adopera anche P, in modo però che il risultato (x, y) non dipenda da P. Il ragionamento precedente prova sol-

tanto che x ed y apparterranno al campo di razionalità

$$K' = [1, a, b, c \ldots, m, n].$$

Ma per l' arbitrio nella scelta di P si può sempre fare in modo che m, n appartengano al campo di razionalità primitivo K; ciò è chiaro se P è completamente arbitrario, e risulta pur subito anche se P è soggetto alla sola condizione di appartenere ad una retta $\alpha x + \ldots = 0$ della figura, giacchè scelto allora m entro a K, risulterà n mediante operazioni razionali da eseguirsi sopra m e sopra numeri di K. Fatta questa scelta per P, il campo K' viene a coincidere con K, e quindi sempre il punto costruito x, y ha coordinate appartenenti a K [1].

§ 6. **Le costruzioni grafiche di planimetria eseguibili colla riga.** — Trasformiamo la proposizione del paragrafo precedente, proiettando il piano π che contiene la nostra costruzione sopra un nuovo piano π'; il centro di proiezione S sia scelto ad arbitrio fuori di π e π'. Otterremo così un risultato avente carattere proiettivo.

Per enunciarlo dobbiamo esaminare come si trasformi nella detta operazione il sistema di coordinate cartesiane considerato su π. Questo sistema è definito dagli assi x, y di cui O è l' intersezione, e di cui X_∞, Y_∞ siano i punti all' infinito, inoltre dal punto unità U. Fissato su π un punto M qualsiasi, cerchiamo di scriverne le coordinate x, y sotto forma di doppi rapporti. Notiamo perciò che volendo l' ascissa x di M basta proiettare i punti

---

[1] Per l' ultima considerazione cfr. le *Lezioni di algebra complementare* del prof. Capelli (1895) pag. 429.

U ed M da Y_∞ sull' asse x; otterremo così i punti U_x, M_x e sarà (cfr. § 4):

$$x = \frac{OM_x}{OU_x} = (X_\infty O U_x M_x) = Y_\infty (X_\infty O U M),$$

dove coll' ultimo simbolo indichiamo il doppio rapporto delle quattro rette che uniscono il punto Y_∞ coi punti segnati tra parentesi. Analogamente si avrà

$$y = X_\infty (Y_\infty O U M).$$

Ora se proiettiamo i punti O, X_∞, $Y_\infty \ldots$ del piano π sopra un piano π' da un centro qualsiasi, e chiamiamo O', X', $Y' \ldots$ i punti proiezioni (punti generalmente propri), si avrà subito

$$x = Y'(X'O'U'M'), \quad y = X'(Y'O'U'M').$$

Qui conviene rammentare che, dato sopra un piano π' un triangolo qualsiasi $O'X'Y'$ ed un punto U' non appartenente a nessun lato, in corrispondenza ad ogni punto generico M' del piano rimane pienamente definita una coppia di numeri x, y mediante i valori dei due ultimi doppi rapporti; e viceversa noti x ed y è individuato il punto M' (fatta eccezione soltanto per i valori $x = \pm \infty$ $y = \pm \infty$, e per i punti del lato $X'Y'$, ai quali elementi occorrerebbe applicare una nota convenzione che è inutile qui specificare). I due numeri x, y, così associati ad M', si sogliono dire *coordinate proiettive* di M' rispetto al *triangolo fondamentale* $O'X'Y'$ ed al *punto unità* U', o, brevemente, rispetto ai *quattro punti fondamentali* $O'X'Y'U'$. I quattro punti fondamentali di un sistema di coordinate proiettive possono scegliersi comunque, purchè mai tre di essi siano allineati.

Riassumendo la nostra osservazione, diremo che le coordinate cartesiane del punto generico M di π coincidono colle coordinate proiettive del punto proiezione

M' su π' riferito a convenienti punti fondamentali. In breve: « un sistema di coordinate cartesiane di un piano » dà per proiezione sopra un secondo piano un sistema » di coordinate proiettive »; ed è vera anche l' inversa, purchè si scelgano convenientemente centro e piano di proiezione.

In base a questa osservazione, siamo in grado di enunciare subito un risultato proiettivo analogo al teorema metrico del § 4:

Siano dati in un piano quattro o più punti in numero finito, tra cui supponiamo si trovino sempre quattro punti che siano vertici di un quadrangolo; presi questi ultimi come punti fondamentali di un sistema di coordinate proiettive, e dette a, b, c... le coordinate dei punti rimanenti (se esistono), è possibile costruire colla sola riga ogni altro punto le cui coordinate appartengano al campo di razionalità [1, *a, b, c...*]; *e viceversa ogni punto raggiungibile mediante una costruzione determinata da eseguirsi colla sola riga, ha coordinate appartenenti al detto campo.* Nella costruzione non occorre (ma è lecito) adoperare punti o rette ausiliarie, che possano assumersi ad arbitrio.

Il risultato che precede può esser anche presentato sotto la forma seguente che ne mette in rilievo tutta l' importanza:

« Siano dati in un piano più punti in numero finito; » si congiungano questi a due a due, si determinino le » intersezioni delle rette così ottenute, si estenda il » gruppo dei punti primitivi aggregandovi i nuovi punti » trovati, si operi sul nuovo gruppo come sull' antico, e » così si continui all' infinito. Si otterrà in tal guisa » una classe di infiniti punti, eccettuato il caso che i » punti primitivi siano tutti, o tutti meno uno, allineati » (eccezione questa che apparisce nell' enunciato prece- » dente). Si domanda di caratterizzare in qualche modo » la classe dei punti così ottenuti, la quale, come subito

» si verifica, non comprende tutti i punti del piano ». La risposta è data dall'ultima proposizione:

« Se tra i punti dati si scelgono quattro, che siano » vertici di un quadrangolo, come punti fondamentali » di un sistema di coordinate proiettive, e si chiamano » a, b, c... le coordinate degli altri punti dati, ove esi- » stano, la nostra classe di punti si compone di tutti » quei punti, le cui coordinate appartengono al campo » di razionalità [1, a, b, c...] ».

Le operazioni geometriche che conducono alla costruzione di una siffatta classe di punti, trovano dunque riscontro nelle operazioni aritmetiche che conducono alla costruzione di un campo di razionalità partendo da una *base* (1). Il caso più semplice di quattro soli punti, il quale conduce alla classe di tutti i punti aventi le due coordinate razionali, fu considerato la prima volta dal Möbius, che chiamò *rete* quella classe.

§ 7. **Quali siano i problemi risolubili colla sola riga.** — Ora possiamo rispondere completamente ad una delle questioni fondamentali del nostro scritto:

Quali sono i problemi geometrici che si possono risolvere colla sola riga?

È chiaro che tanto i *dati*, quanto i *risultati*, dovranno potersi tracciare colla sola riga, e saranno quindi o punti, o rette, in numero finito. Ma per maggiore uniformità ci conviene di ridurci al caso di soli punti, il che può sempre ottenersi, per esempio, nel modo seguente. Fissato un triangolo che abbia i vertici o i lati compresi possibilmente tra gli elementi dati (o, quando non sia possibile, abbia qualche elemento in posizione

(1) La traduzione per dualità piana dell'ultimo risultato, riferendosi a rette anzichè a punti, è immediata. Così pure è immediata l'estensione allo spazio.

generica rispetto ai dati), noi potremo sostituire ad ogni retta (che sia data o da costituirsi) la coppia di punti che essa sega sopra due lati del triangolo fondamentale [1]. E così il problema si ridurrà sempre ad uno o più problemi del tipo seguente: *Dati più punti, in numero finito, costruire un punto che abbia con quelli date relazioni.* Per tradurre sotto forma analitica il problema, riferiremo i punti dati e il punto incognito ad un sistema di coordinate proiettive, di cui il triangolo nominato sia fondamentale, e di cui il punto unità sia uno dei punti dati, quando ciò sia possibile, o sia un punto generico del piano nel caso opposto. Riguarderemo allora come *date* le coordinate a, b, c... dei punti dati, come *incognite* le coordinate x, y del punto incognito. Se il problema è determinato, le relazioni in esso contenute dovranno tradursi alla fine in due equazioni contenenti l'una x, l'altra y, equazioni che possiamo supporre ridotte alla forma più semplice (spogliate dalle soluzioni estranee, per quanto è possibile). Orbene:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un problema geometrico sia risolubile colla sola riga, è che le equazioni da cui il problema dipende, siano lineari ed abbiano i coefficienti appartenenti al campo di razionalità $[1, a, b, c \ldots]$ *determinato dai dati.* Infatti in questo, ed in questo solo caso, le coordinate incognite x, y apparterranno al detto campo.

In forma concisa: *sono risolubili colla sola riga i problemi geometrici di primo grado e questi soltanto.*

Qui si noti che il risultato è vero sia quando nella costruzione si adoperano soltanto i punti (o rette) dati, sia anche quando a questi si aggiungano punti (o rette)

---

[1] Dal punto di vista analitico ciò equivale a considerare la retta come data dai rapporti di due dei tre coefficienti della sua equazione, al terzo coefficiente, ossia dalle sue due coordinate proiettive.

ausiliari, i quali possano assumersi o completamente ad arbitrio nel piano, o ad arbitrio sopra rette date (o passanti per punti dati se si tratta di rette). Ciò segue dalla *Osservazione* del § 5, dalla quale risulta che coll' aggiungere ai punti dati un punto (o, per dualità, una retta) ausiliario da assumersi ad arbitrio nel modo detto, non si riesce mai ad ampliare effettivamente un campo di razionalità.

Osservazione. — Piuttosto è necessario che ci fermiamo a considerare i problemi che contengono in modo più o meno esplicito nozioni metriche.

Supponiamo anzitutto che i dati siano soltanto punti *propri* (cioè non all' infinito), tra i quali non passi nessuna relazione metrica particolare (all' infuori, si intende, delle relazioni che traducono caratteri grafici, allineamenti ecc.); fra i dati dunque non compariranno nè lunghezze di segmenti, nè valori di angoli.... Volendo assumere un sistema di coordinate che sia strettamente collegato coi dati, dovremo riferirci a coordinate proiettive. Ma allora non saremo in grado di esprimere una relazione metrica (di parallelismo, o segmentaria, o angolare, eccezion fatta per i doppi rapporti) che interceda tra i punti dati e un punto richiesto. Non potremo adunque, non solo risolvere, ma nemmeno porre in equazione un problema *metrico* che si riferisca ai dati. Dunque *non è possibile risolvere colla sola riga un problema che contenga nozioni metriche (parallelismo, valori di segmenti, angoli, aree....), quando i dati siano punti (o rette) tra i quali non passi nessuna relazione metrica prestabilita.*

Che questa impossibilità sia *assoluta*, indipendente cioè da sistemi di coordinate, da metodi analitici, ecc., si può del resto mostrare per la via che qui accenno. Siano dati in un piano π più punti propri A, B, C.... non aventi alcuna relazione metrica tra di loro, e sia P un punto a cui si perviene mediante una costruzione

colla sola riga eseguita sui dati. Siano A', B', C'.... P' le proiezioni dei punti precedenti sopra un piano generico π' da un centro generico. La figura costruttiva in π si proietterà in una figura costruttiva di π' (poichè rette si proiettano in rette....); quindi si potrà dire che la costruzione, la quale conduce da A, B, C.... al punto P sopra il piano π, condurrà nel piano π' dai punti A', B', C'.... al punto P'. Tanto basta per affermare che le relazioni che legano il punto costruito P ai punti dati A, B, C.... hanno carattere proiettivo (e non metrico), cioè non si alterano mediante una proiezione (mentre i caratteri metrici, parallelismo, lunghezze, angoli, ecc. si alterano per proiezione).

Le cose mutano quando i punti dati abbiano relazioni particolari colla retta all' infinito. Così se ad es. il punto A è all' infinito, ed è quindi determinato graficamente mediante due rette parallele, allora, nel fissare il sistema di coordinate, si potrà assumere A come un vertice del triangolo fondamentale, e si potrà quindi esprimere analiticamente il passaggio di una retta per A, si potrà porre in equazione la condizione che una retta richiesta, condotta ad es. per B, sia parallela alle due rette parallele assegnate; dall' esser lineare l' equazione risulta subito cha la costruzione della retta domandata può eseguirsi colla sola riga, come è notissimo.

Ma finchè non siano dati (direttamente o indirettamente) altri punti impropri, non si potrà costruire la parallela ad una retta assegnata avente direzione diversa da A, e il problema corrispondente non si potrà nemmeno porre in equazione.

Se però fosse dato un parallelogramma, si potrebbe adoperare un sistema di coordinate cartesiane (§ 5), e quindi si potrebbe porre in equazione ogni problema che riguardasse questioni di parallelismo, di rapporti di segmenti paralleli, rapporti di aree ecc....; non ancora

i problemi che riguardano l' uguaglianza dei segmenti e degli angoli in posizione generica, la perpendicolarità.... (almeno finchè non sia dato il coseno dell' angolo del parallegramma).

Si possono invece *porre in equazione tutti i problemi metrici, appena si conosca un quadrato,* perchè allora si dispone di un sistema cartesiano ortogonale; se la equazione sarà lineare, allora e allora soltanto il problema potrà risolversi colla sola riga [1].

II

§ 8. **Quale contributo porti l' aggiunta del compasso alla riga.** — Esaminate così le costruzioni che si possono eseguire colla riga, vediamo ora quale contributo porti l' uso del compasso aggiunto all' uso della riga.

Ci domandiamo dunque come si estenda la classe dei punti costruibili colla riga (partendo da punti dati), quando a quelli si aggiungano tutti i punti raggiungibili mediante costruzioni eseguite col compasso; od anche come si estenda il campo di razionalità $[1, a, b, c \ldots]$ contenente le coordinate dei primi punti, quando si aggiungono le coordinate dei secondi punti.

Poichè il compasso ci permette la costruzione di un angolo retto, anzi di un quadrato, ci converrà riferire i nostri punti ad un sistema di coordinate *cartesiane ortogonali*, e di assumere la stessa unità di misura per le ascisse e per le ordinate. Potremo ad es. scegliere uno dei punti dati O come origine, la retta congiungente

---

[1] Per la risoluzione effettiva dei più elementari problemi metrici lineari, dato un quadrato (o un parallelogramma e due coppie di direzioni ortagonali), cfr. art. 9.

O con un altro punto come asse x, e la distanza dei due punti come unità di lunghezza.

Indichiamo con $a, b, c \ldots.$ le coordinate dei punti dati, in numero finito; allora sappiamo intanto che mediante la riga è costruibile ogni punto, le cui coordinate appartengano al campo di razionalità

$$K = [1, a, b, c \ldots.].$$

Sia k un numero positivo qualsiasi del campo K, numero che possiamo riguardare come valore di un segmento noto situato sopra l' asse x. Ora mediante il compasso noi sappiamo costruire sopra x (o sopra y) un segmento la cui lunghezza sia $\sqrt{k} = \sqrt{k.1}$, giacchè tutto si riduce a costruire la media geometrica tra due segmenti dati aventi le lunghezze k ed 1. Dunque mediante il compasso noi possiamo ottenere una prima estensione del campo K aggiungendovi la radice quadrata di ogni numero positivo in esso contenuto. Arriveremo così ad un campo di razionalità K' che potremo a sua volta estendere (interpretando analiticamente le costruzioni tracciate mediante il compasso) coll' aggiungervi la radice quadrata di ogni numero positivo in esso contenuto. E così possiamo continuare all' infinito.

Il campo di razionalità più ristretto che contiene i campi $K, K' \ldots$ a cui via via perveniamo, si può rappresentarlo mediante il simbolo

$$K^{\frac{1}{2}} = [1, a, b, c \ldots]^{\frac{1}{2}},$$

ed è completamente caratterizzato dalle due proprietà seguenti:

1) *il campo* $K^{\frac{1}{2}}$ *contiene le quantità* $1, a, b, c \ldots$ *in numero finito*;

2) *esso contiene inoltre ogni quantità reale che si ottenga da quelle applicando un numero indeterminato ma*

finito di volte le operazioni razionali e le estrazioni di radici quadrate.

Alla condizione 2) si potrebbe anche sostituire la condizione equivalente che: *il campo* $K^{\frac{1}{2}}$ *sia il più ristretto campo contenente la radice quadrata di ogni numero positivo che ad esso appartiene*; o in altra forma ancora che: $K^{\frac{1}{2}}$ *sia il più ristretto campo contenente le radici reali di ogni equazione quadratica i cui coefficienti appartengano al campo stesso.*

In base alle considerazioni suesposte possiamo dunque asserire che, quando si parta da punti in numero finito, le cui coordinate definiscano un campo di razionalità $K = [1, a, b, c \ldots]$, e si operi su quelli mediante riga e compasso, si potrà costruire ogni punto le cui coordinate appartengono al campo $K^{\frac{1}{2}}$.

Ora dico che è pur vera l'inversa: ogni punto a cui si pervenga operando mediante riga e compasso sopra i punti dati, ha coordinate appartenenti al campo di razionalità $K^{\frac{1}{2}}$ nominato. Infatti si parta da una certa classe di punti, per es. da quei punti le cui coordinate appartengono al campo di razionalità K. I nuovi punti che a questi potranno aggiungersi mediante determinate costruzioni da eseguirsi col compasso, si otterranno come intersezioni di una retta e di un cerchio, oppure di due cerchi, che a loro volta saranno individuati dai punti primitivi. Anzi possiamo sempre ridurci al caso di una retta e di un cerchio, perchè quando fossero dati due cerchi

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$
$$x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0,$$

al secondo si potrebbe sostituire la retta (asse radicale)

$$(ax + by + c) - (a'x + b'y + c) = 0,$$

che può costruirsi linearmente, partendo dai centri e raggi dei cerchi dati [1]. D' altra parte un cerchio è individuato quando se ne conosca il centro ed il raggio, oppure il centro ed un punto, oppure tre punti; ma gli ultimi due casi si possono subito ridurre al primo con operazioni lineari. Ora se riguardiamo come noti i punti definiti da un certo campo di razionalità K, potremo dire che un cerchio è pienamente determinato quando il centro abbia coordinate α, β appartenenti a K, ed il raggio r sia un numero di K, o sia la distanza di due punti della classe, nel qual caso, se non r, certo r^2 appartiene a K. Comunque, l' equazione del cerchio

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

avrà i coefficienti appartenenti a K. Altrettanto si potrà dire dell' equazione di una retta

$$mx+ny+p=0$$

definita da due dei nostri punti. Ora la determinazione delle intersezioni della retta e del cerchio si riduce a risolvere il sistema delle due equazioni, e quindi, in sostanza, a risolvere una equazione di secondo grado nella sola x, della quale i coefficienti appartengono a K, per dedurre poi razionalmente y. Dunque le coordinate di ogni punto che possa aggiungersi alla classe primitiva mediante *una* operazione da eseguirsi col compasso (unita ad operazioni eseguite colla riga), apparterranno certo a quel campo di razionalità K' che si ottiene da K aggiungendovi le radici quadrate di tutti i numeri positivi contenuti in K. Ormai è chiaro come si prosegua quando si operi più volte col compasso, e come si pervenga in conseguenza al campo $K^{\frac{1}{2}}$ sopra definito.

Sicchè possiamo senz' altro enunciare il risultato fondamentale:

---

[1] Cfr. art. 9.

Si parta da un numero finito di punti, che riferiti ad assi cartesiani ortogonali abbiano le coordinate 1, *a*, *b*, *c*..., *e su quelli si operi mediante costruzioni determinate, da eseguirsi colla riga e col compasso. Ogni punto a cui si perverrà dopo un numero finito di costruzioni, avrà coordinate appartenenti al campo di razionalità* $K^{\frac{1}{2}}$, *che è generato dai numeri dati* 1, *a*, *b*, *c*... *quando sopra essi si operi mediante operazioni razionali ed estrazioni di radici quadrate da basi positive (in numero finito); e viceversa ogni punto di cui le coordinate appartengano a* $K^{\frac{1}{2}}$, *potrà costruirsi mediante la riga ed il compasso.*

In breve: *colla riga e col compasso si può costruire ogni espressione reale, formata colle quantità date, la quale non contenga altre irrazionalità che estrazioni di radici quadrate.*

§ 9. **Quali problemi possano risolversi colla riga e col compasso.** — Il risultato precedente permette subito di rispondere alla domanda: *quali sono i problemi che possono risolversi colla riga e col compasso?*

Notiamo anzitutto che tanto i dati quanto gli elementi da costruirsi dovranno esser o punti, o rette, o cerchi, in numero finito. Però ad una retta e ad un cerchio si potrà sostituire un certo numero di punti atti a determinare quegli enti, punti che a loro volta siano determinati quando siano noti gli enti stessi; così ad es. ad un cerchio si potrà sostituire il centro ed una intersezione del cerchio colla parallela all' asse x condotta pel centro. Si potrà dunque supporre che siano dati soltanto punti, e che si ricerchino solo punti. Riferiamo i punti dati e gli incogniti ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali che sia legato ai dati nel modo sopra esposto. Siano 1, *a*, *b*, c... le coordinate dei punti dati,

e sia x una coordinata di un punto incognito; il ragionamento che faremo sopra x si ripeterà per ogni altra coordinata di ogni punto incognito. Affinchè il nostro punto incognito possa costruirsi colla riga e col compasso, la quantità x (reale) dovrà potersi calcolare mediante un numero finito di operazioni razionali e di estrazioni di radici quadrate da eseguirsi sui numeri dati $1, a, b, c \ldots$ Uguagliando x ad una espressione formata in tal guisa coi dati, e liberando da irrazionalità, otterremo una equazione algebrica razionale intera nella x, della quale i coefficienti apparterranno al campo di razionalità $K = [1, a, b, c \ldots]$.

Dunque potremo dire intanto che, traducendo analiticamente le condizioni del problema, ed eseguendo eliminazioni in guisa da ridurci ad una o più equazioni, ciascuna con una sola incognita $x \ldots$, queste equazioni dovranno essere algebriche e potranno porsi sotto forma razionale intera, in guisa da aver per coefficienti quantità del campo K.

Ma le condizioni qui espresse non saranno generalmente sufficienti; a parte il caso, che ciascuna equazione risulti di grado ≤ 2, giacchè allora evidentemente il problema potrà risolversi con riga e compasso. Che se una almeno delle dette equazioni risulterà di grado superiore a 2, si esigerà ancora che la radice richiesta di quella equazione possa calcolarsi mediante operazioni razionali ed estrazioni di radici quadrate da eseguirsi sui dati, o in altre parole mediante risoluzioni di successive equazioni quadratiche. E la successione di queste potrà sempre pensarsi così ordinata, che la prima equazione quadratica abbia i coefficienti appartenenti al campo K, la seconda equazione abbia i coefficienti nel campo che si ottiene da K mediante aggiunta delle radici della prima equazione, e così via, finchè l'ultima equazione avrà come radice la quantità richiesta, e per

coefficienti numeri appartenenti al campo che si ottiene da K coll' aggiunta delle radici di tutte le equazioni quadratiche precedenti. Diremo adunque, riassumendo la parte essenziale, e sottointendendo il resto:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un problema geometrico possa risolversi colla riga e col compasso, è che ciascuna delle equazioni da cui il problema dipende sia algebrica razionale intera coi coefficienti appartenenti al campo di razionalità formato coi dati, e che inoltre ciascuna delle dette equazioni sia o di grado $\leqq 2$, *o risolubile mediante risoluzione di una successione di equazioni di secondo grado formata nel modo esposto.*

In forma anche più concisa:

I problemi risolubili colla riga e col compasso sono i problemi di primo e di secondo grado, ed inoltre i problemi di grado superiore, la cui risoluzione si può far dipendere dalla risoluzione di una successione di problemi di grado $\leqq 2$.

Osservazione. — Anche qui, per non complicar le cose, ho ragionato esclusivamente sui dati e non sugli elementi (punti o rette) ausiliari che può esser utile di introdurre per eseguire la costruzione. Si intende che un elemento, ad es. un punto ausiliario, dovrà potersi assumere ad arbitrio sia in tutto il piano, sia sopra una retta determinata dai dati, sia sopra un cerchio determinato dai dati; e comunque quel punto venga scelto esso non deve influire sul risultato della costruzione. Ma allora, ragionando come nella *Osservazione* del § 5, si vede che è lecito assumere una almeno delle coordinate del punto entro al campo K; e l' altra coordinata o rientrerà nel campo K, o nel campo $K^{\frac{1}{2}}$ che si ottiene da K coll' aggiunta della estrazione di radice quadrata. E ciò prova che la introduzione del punto ausiliario non permette di uscire dal campo $K^{\frac{1}{2}}$, a cui, come dicemmo, devono appartenere le coordinate del punto incognito,

perchè questo possa costruirsi mediante riga o compasso. Sicchè il risultato precedente rimane vero anche se, accanto ai dati, si introducano elementi ausiliari.

§ 10. **Cenno sopra alcuni problemi classici.** — Le considerazioni dell' ultimo paragrafo ci mostrano come la questione di decidere se un determinato problema sia risolubile colla riga e col compasso, possa ricondursi, col mezzo della geometria analitica, alla questione di decidere se certe equazioni sono risolubili introducendo le sole irrazionalità che provengono da estrazioni di radici quadrate. La questione appartiene all' algebra; e l' algebra oggi dispone di mezzi per decidere se una determinata equazione *algebrica* sia risolubile nel detto modo.

Valgano gli esempi negativi della trisezione di un angolo dato ω (corrispondente all' equazione

$$4x^3 - 3x - \cos\omega = 0),$$

della duplicazione del cubo ($x^3 - 2 = 0$), e l' esempio positivo della divisione di un cerchio in un numero primo p di parti uguali quando p è della forma $2^n + 1$ (equazione $x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + 1 = 0$) (1). Di gran lunga più difficile è in certi casi la questione preliminare di decidere se la equazione da cui dipende il problema, sia algebrica o trascendente, giacchè qui manca un metodo generale di trattazione. E così solo pochi anni or sono, nel 1882, fu dimostrato dal Lindemann che il problema della rettificazione e quadratura del cerchio è *trascendente*, giacchè π non è radice di nessuna equazione algebrica a coefficienti razionali (appartenenti al campo di razionalità [1] determinato dalla sola grandezza data, *raggio del cerchio*, che si assume come unità di misura) (2).

---

(1) Cfr. rispett. gli art. 13, 11.

(2) Cfr. art. 14.

Ma noi non possiamo fermarci sopra tali questioni d' indole analitica, senza uscire dai limiti che ci siamo prefissi.

§ 11. **Di alcuni semplici strumenti che possono servire a risolvere problemi geometrici: il trasportatore di segmenti.** — Notiamo piuttosto che le considerazioni esposte sinora possono applicarsi allo studio di altri strumenti geometrici (oltre alla riga ed al compasso), atti a risolvere problemi d' indole più elevata. Ma noi preferiamo di passare in rassegna qualche strumento che può sostituire parzialmente o totalmente il compasso nella risoluzione dei problemi sopra considerati. Cominciamo dal *trasportatore dei segmenti* (1).

Osserviamo perciò che una delle operazioni eseguite più spesso col compasso consiste nel trasportare sopra una retta data, a partire da un punto dato, un segmento assegnato in un' altra posizione del piano; la operazione equivale a determinare l'intersezione di un cerchio dato con una retta *passante pel centro*. Ora una siffatta operazione si eseguisce spesso nella pratica anche senza usare il compasso, ma servendosi di una striscia di carta, o di una riga graduata o graduabile, ecc., insomma di uno strumento che in breve chiameremo *trasportatore dei segmenti*. E val la pena di notare che lo strumento può ridursi anche ad una forma più semplice, ad un *segmento trasportabile di lunghezza prefissa* che si potrà assumere come unità di lunghezza (*trasportatore dell' unità*); giacchè trasportata l' unità da una retta r sopra una retta s, si può, con una costruzione di quarta proporzionale (eseguibile colla sola riga), trasportare ogni altro segmento di r sopra s.

---

(1) Cfr. per le osservazioni di questo paragrafo la importante *Monografia* del sig. HILBERT. « *Grundlagen der Geometrie* » (Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber Denkmals in Göttingen. Leipzig, Teubner 1899).

Ciò posto si chiede ora: *col trasportatore dell'unità e colla riga, sono risolubili tutti quei problemi che possono risolversi col compasso e colla riga? o in caso negativo, quali sono i problemi risolubili coi primi strumenti?*

Cominciamo a costruire col trasportatore un angolo retto. A tal fine sopra due rette arbitrarie r, s incrociantisi in un punto O, portiamo da una banda e dall'altra di O la unità di lunghezza. Otteniamo così i quattro vertici di un rettangolo, di cui le mediane x, y (costruibili colla riga) sono perpendicolari; sono precisamente le bisettrici dell'angolo rs [1].

Ora partendo dalle due rette x, y e servendoci della unità di lunghezza, possiamo costruire un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, a cui riferiremo i punti dati di un problema che venga proposto. Sia K il campo di razionalità più ristretto che contiene le coordinate di questi punti. Ricordiamo ora che l'operazione più generale che possiamo eseguire col nostro strumento, consiste nel costruire un segmento uguale all'unità, il quale abbia un estremo in un punto dato (a, b), e giaccia sopra una retta data

$$y - b = m\,(x - a) \qquad (a,\ b,\ m \text{ quantità di } K).$$

L'estremo costruito del segmento avrà coordinate x, y tali che risulti

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = (x-a)\sqrt{1+m^2} = 1\,,$$

donde

$$\sqrt{1+m^2} = \frac{1}{x-a}\,.$$

---

[1] Si noti a questo proposito che il nostro strumento permette di bisecare ogni angolo dato. Ma è pur vera l'inversa: uno strumento che permetta di bisecare un angolo qualsiasi (bisettore), permette di trasportare un segmento da una retta ad un'altra.

Vediamo di qua che col trasportatore dei segmenti noi possiamo costruire una espressione (per es. valore di un segmento) del tipo $\sqrt{1+m^2}$, ogniqualvolta m è un numero dato (valore di un dato segmento); ed anzi è questa la operazione più generale che il nostro strumento permette di compiere.

E concludiamo infine che *se si parte da più punti aventi coordinate (cartesiane ortogonali)* 1, a, b, c...., *ed a questi si applicano costruzioni mediante riga e trasportatore di segmenti, ogni punto a cui si giungerà avrà coordinate appartenenti a quel campo di razionalità che si genera operando sui numeri dati mediante le operazioni razionali e la operazione* $\sqrt{1+m^2}$, *dove* m *è un numero dato, o un numero già ottenuto dai dati mediante le dette operazioni. E viceversa ogni punto le cui coordinate appartengano all' ultimo campo, potrà ottenersi operando cogli strumenti nominati.*

Sia $K = [1, a, b, c....]$ il campo primitivo di razionalità determinato dai dati; indichiamo con $\left(K^{\frac{1}{2}}\right)$ il campo a cui si arriva aggiungendo alle operazioni razionali la operazione $\sqrt{1+m^2}$, mentre continuiamo a indicare col simbolo $K^{\frac{1}{2}}$ il campo a cui si perviene da K aggiungendo l' operazione generale di estrazione di radice quadrata $\sqrt{m}$ da una base positiva m appartenente al campo K, o ai campi che via via si ottengono nel detto modo. $K^{\frac{1}{2}}$ è, per dir così, il campo dei numeri costruibili colla riga e col compasso, mentre $\left(K^{\frac{1}{2}}\right)$ è il campo dei numeri costruibili colla riga e col trasportatore. Risulta subito dalla definizione che ogni numero di $\left(K^{\frac{1}{2}}\right)$ è contenuto in $K^{\frac{1}{2}}$; si domanda però se sia vero l' inverso, vale a dire se i due campi coincidano o no.

Vedremo facilmente con un esempio che *il campo* $\left(K^{\frac{1}{2}}\right)$ *è più ristretto del campo* $K^{\frac{1}{2}}$, e concluderemo quindi che *non ogni costruzione eseguibile colla riga e col compasso può eseguirsi colla riga e col trasportatore dei segmenti.* L'ultimo strumento non può adunque sostituire interamente il compasso.

Per dimostrar ciò nel modo più semplice partiamo da un campo K particolare, per esempio dal campo $K = [1, a]$ dove a è un *parametro* (§ 2), vale a dire una quantità che può assumere valori arbitrari nel corso della questione. E consideriamo la espressione $\sqrt{1 - a^2}$ che appartiene al campo $K^{\frac{1}{2}}$, ed è costruibile colla riga e col compasso per tutti i valori di a compresi tra -1 e $+1$. Ammettiamo, se è possibile, che quella espressione appartenga (per quei valori di a) anche al campo $\left(K^{\frac{1}{2}}\right)$. Supponiamo adunque di poter scrivere una uguaglianza avente a primo membro $\sqrt{1 - a^2}$, mentre il secondo membro deve contenere uno o più segni di $\sqrt{\ }$ sotto a ciascuno dei quali starà una espressione del tipo $1 + m^2$, dove m è una quantità k di K, o una quantità k' del campo più esteso che si ottiene aggiungendo a K le quantità del tipo $\sqrt{1 + k^2}$, ecc. In qualunque caso sarà m una quantità reale, $1 + m^2$ una quantità positiva, e $\sqrt{1 + m^2}$ una quantità reale. Dunque il secondo membro della nostra uguaglianza ipotetica ha valore *reale qualunque* sia la quantità reale a. D'altra parte la nostra uguaglianza vale per infiniti valori di a $(-1 \leqq a \leqq 1)$, e quindi, trattandosi di una relazione algebrica, deve sussistere per *ogni* valore di a. Ora ciò non è possibile; infatti il primo membro $\sqrt{1 - a^2}$ è immaginario ad es. per $a > 1$, mentre il secondo membro è reale qualunque sia a. L'assurdo a cui siamo giunti così, ci prova che $\sqrt{1 - a^2}$ non può

appartenere al campo $\left(K^{\frac{1}{2}}\right)$, e quindi che questo campo è più ristretto del campo $K^{\frac{1}{2}}$. Geometricamente parlando, il nostro esempio mostra che, dati due segmenti non aventi relazioni tra loro, è impossibile costruire col trasportatore un triangolo rettangolo di cui il segmento maggiore sia ipotenusa e l' altro un cateto.

Qui si osservi che la dimostrazione data pel campo $[1, a]$, si sarebbe potuta presentare, un po' diversamente, pel campo più ristretto $K = [1]$, considerando allora una espressione contenente (in modo irriducibile) *più* segni di radice quadrata, e formata in tal guisa che i valori che si ottengono variando in tutti i modi i segni dei radicali, siano in parte reali, in parte immaginari; tale è ad esempio l' espressione $\pm \sqrt{\pm \sqrt{2}}$, la quale ha due valori reali e due immaginari. Una tale espressione che appartiene al campo $K^{\frac{1}{2}}$, non può certo appartenere al campo $\left(K^{\frac{1}{2}}\right)$, perchè in quest' ultimo caso dovrebbe aver tutti i suoi valori reali. Da queste osservazioni segue subito il risultato:

Siano dati uno o più segmenti di lunghezze 1, *a*, *b*, *c*..., *alcune delle quali prefisse (numeriche), altre arbitrarie (parametriche), e si tratti di costruire un segmento di cui il valore sia dato da una espressione formata mediante operazioni razionali ed estrazioni di radici quadrate eseguite sui dati (dove si suppone che il numero dei radicali sia ridotto per quanto è possibile): affinchè il segmento richiesto si possa costruire colla riga e col trasportatore di segmenti, è condizione necessaria che siano reali tutti i valori che la espressione data assume, sia quando si mutino comunque i segni dei radicali, sia quando si lascino variare comunque i parametri che entrano tra i dati.*

Di fronte a questo risultato, che si giustifica, come abbiamo visto, in modo semplice, il signor Hilbert ne

stabilisce un altro molto più importante, a cui egli perviene con un ragionamento troppo elevato per esser qui riprodotto: *la condizione enunciata, non solo è necessaria per la costruzione, ma è pur sufficiente.*

In base a ciò si può dire *che ogni problema il quale sia risolubile colla riga e col compasso, può anche risolversi sostituendo all' ultimo strumento il trasportatore di segmenti, purchè tutte le soluzioni algebriche del problema siano reali (atte quindi a costruzioni grafiche), e ciò anche quando ai dati si lasci la maggior libertà di cui sono suscettibili.*

Come esempio, il signor Hilbert nota che il problema della divisione di un cerchio in n parti uguali, quando è risolubile colla riga e col compasso, è pur risolubile colla riga e col trasportatore dei segmenti. E si può anche osservare (per via diretta) che cogli ultimi strumenti può risolversi ogni problema di *secondo* grado (avente soluzioni reali), i cui dati abbiano coordinate *razionali.*

§ 12. **L' uso del cerchio fisso.** — Noi abbiamo visto ora che il trasportatore dei segmenti permette di ampliare un campo di razionalità K mediante l'aggiunta della operazione $\sqrt{1+k^2}$ eseguita sopra un numero k del campo; ma non dà il modo di eseguire in generale la operazione $\sqrt{1-k^2}$, nè la operazione $\sqrt{k}$ (operazione quest' ultima corrispondente all' uso del compasso). Si presenta dunque naturale la questione di esaminare se uno strumento, il quale permettesse di eseguire l' operazione $\sqrt{1-k^2}$ (per $-1 \leqq k \leqq 1$), fosse in grado di sostituire interamente il compasso. Ora è chiaro che a questa domanda si deve rispondere affermativamente. Sia infatti a una quantità appartenente al campo di razio-

nalità K; noi possiamo costruirci colla sola riga la espressione

$$k = \frac{1-a}{1+a},$$

e quindi, collo strumento in discorso, l' espressione

$$x = \sqrt{1-k^2} = \frac{1}{1+a}\sqrt{(1+a)^2-(1-a)^2} = \frac{2}{1+a}\sqrt{a},$$

e quindi finalmente l' espressione

$$\sqrt{a} = \frac{1+a}{2}x.$$

Dunque lo strumento, a cui alludiamo, permette di ampliare il campo K nello stesso modo come il compasso; e permette, mediante successive estensioni, di arrivare al campo $K^{\frac{1}{2}}$ formato dalle espressioni costruibili mediante riga e compasso. Diremo così:

Uno strumento il quale permetta, quando sono dati due segmenti aventi le lunghezze 1 *ed* $a < 1$, *di costruire un terzo segmento di lunghezza* $\sqrt{1-a^2}$, *può sostituire interamente il compasso nella risoluzione di ogni problema geometrico che sia risolubile col compasso e colla riga.*

Vediamo qualche modo di realizzare una siffatta costruzione.

Sia tracciato (con uno strumento qualsiasi) *un cerchio* in una determinata posizione del piano, e sia noto il centro O del cerchio. È chiaro intanto che si potranno condurre colla sola riga due rette perpendicolari per O, giacchè basterà iscrivere nel nostro cerchio un rettangolo di cui due diametri arbitrari possono essere assunti come diagonali, e costruir poi le mediane del rettangolo. Assumendo poi il raggio del cerchio come unità, avremo un sistema di coordinate cartesiane ortogonali a cui riferiremo i dati.

Sia ora $OA = a$ un segmento noto sopra l' asse x, minore del raggio del cerchio (ad es. ascissa di un punto dato); conduciamo (colla riga) la perpendicolare ad x in A fino ad incontrare il cerchio in P; il segmento AP così costruito, risulterà uguale a $\sqrt{1 - a^2}$. Dunque:

Quando nel piano sia tracciato, una volta per tutte, un cerchio di cui sia noto il centro, si può, servendosi di quello e della sola riga, risolvere ogni problema che sia risolubile colla riga e col compasso. È questo un risultato notissimo dovuto a Poncelet e Steiner. Da notarsi che la conoscenza del centro del cerchio è necessaria soltanto per la risoluzione dei problemi metrici, ma non dei problemi proiettivi. Per questi anzi il cerchio potrebbe essere sostituito da una conica qualsiasi, purchè non spezzata in due rette.

§ 13. **La riga a due orli paralleli.** — Vediamo ora se il compasso possa essere interamente sostituito dall' uso della *riga a due orli paralleli*, vale a dire dalla riga ordinaria, di cui si adoperino insieme i due orli, in modo da poter condurre due rette parallele distanti quanto l' altezza della riga.

Notiamo anzitutto, che adoperando due volte la riga a due orli si può costruire un parallelogramma equilatero, di cui l' altezza sia uguale all' altezza della riga. Le diagonali del parallelogramma danno una coppia di rette perpendicolari, assi di un sistema cartesiano, del quale prenderemo l' altezza della riga come unità di lunghezza.

Ciò posto, conviene esaminare quali costruzioni fondamentali si possano effettuare colla riga a due orli, e poichè tali costruzioni sono relative al *modo di adoperare la riga*, dobbiamo stabilire una distinzione.

Un primo modo di adoperare la riga a due orli, consiste nel far combaciare un orlo di essa con una

retta data, e costruire le parallele alla retta data che ne distano dell' unità di lunghezza. Così il nostro istrumento permette di trasportare parallelamente a sè stessa una retta data, di un segmento uguale all' unità di lunghezza. Ora, se si suppone che quella retta sia la perpendicolare condotta ad una retta r prefissa, nel modo sopra indicato, l' ultima operazione permette di costruire sopra una retta r arbitraria un segmento uguale all' unità di lunghezza. Sicchè si conchiude che la riga a due orli, adoperata nel primo modo, può sostituire il trasportatore dei segmenti; ed è chiaro che non dà nulla di più di quest' ultimo strumento, come del resto si verificherebbe subito per via analitica.

Ma vi è un secondo modo di adoperare la riga a due orli, che consiste nell' adagiar la riga in modo che i suoi due orli passino rispettivamente per due punti, la cui distanza superi od uguagli l' altezza della riga (unità di lunghezza), tracciando le rette così determinate. In tal guisa come vedremo si riesce a risolvere *ogni* problema che sia risolubile colla riga e col compasso.

Per veder ciò partiamo da un segmento $OA = a > 1$ posto sopra l' asse delle x, segmento che riguardiamo come noto. Collocata la riga in guisa che un orlo passi per O, l' altro per A, tracciamo, seguendo quest' ultimo orlo, la retta AB, che incontrerà in B l' asse y, e sia $OB = b$ il segmento che così si costruisce. Per calcolare b notiamo che la retta indefinita AB ha per equazione

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

e dista dell' unità dall' origine O; ricaviamo di qua la equazione

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} = 1,$$

donde (in valore assoluto)

$$\frac{1}{b} = \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}}.$$

Questo mostra che data la riga a due orli e noto

$$k = \frac{1}{a} < 1,$$

si può costruire l' espressione $\sqrt{1 - k^2}$. E tanto a noi basta per affermare (§ 12):

Ogni problema risolubile colla riga e col compasso, può anche risolversi usando la sola riga a due orli paralleli [1].

---

[1] Si confrontino i resultati ottenuti in questi due ultimi §§ con quelli dati nell' art. 9.

ARTICOLO UNDECIMO

« **Sulle equazioni algebriche risolubili per radicali quadratici e sulla costruibilità dei poligoni regolari** » di Federigo Enriques a Bologna.

La questione di decidere se un problema geometrico costruttivo sia risolubile elementarmente, cioè operando sui dati, colla riga e col compasso, viene ricondotta dalla geometria analitica ad una questione algebrica.

Del modo come tale riduzione si effettua e delle osservazioni ad essa inerenti, discorre il signor Castelnuovo nell' articolo 10.°. A noi basta quì ricordare la conclusione fondamentale:

Sia proposto un problema geometrico determinato, ricondotto alla ricerca dei punti di un piano che hanno relazioni prestabilite con certi punti dati nel piano stesso; affinchè la costruzione dei punti cercati si possa effettuare operando sui dati (e, se si vuole, anche sopra punti, rette e circoli arbitrari) cogli istrumenti riga e compasso, è condizione necessaria e sufficiente che le coordinate cartesiane dei punti incogniti si possano ottenere effettuando sopra le coordinate dei dati operazioni razionali e successive estrazioni di radicali quadratici (in numero finito).

Designeremo brevemente col nome di « *espressioni* (irrazionali) *quadratiche* » le espressioni formate operando sopra quantità date con operazioni razionali ed estrazioni di radicali quadratici; perciò, potremo enunciare l' anzidetta condizione di risolubilità d' un problema dicendo che: le coordinate dei punti incogniti debbono essere delle espressioni quadratiche formate colle coordinate dei dati.

Dimostreremo tra poco che ogni espressione quadratica soddisfa ad un' equazione algebrica i cui coefficienti si esprimono razionalmente per le quantità date, cioè sono razionali nel dato campo di razionalità. Con ciò la questione di decidere se un problema proposto sia risolubile elementarmente, verrà ricondotta alle due questioni seguenti:

1.° decidere se il problema stesso (posto previamente sotto la forma innanzi accennata) sia *algebrico*, cioè venga a dipendere da un' equazione algebrica a coefficienti razionali nel campo dato;

2.° decidere se una data equazione algebrica sia risolubile con operazioni razionali ed estrazioni di radicali quadratici, in un dato campo di razionalità a cui appartengono i coefficienti dell' equazione.

Riguardo alla prima questione notiamo che la geometria analitica insegna a tradurre le relazioni geometriche in relazioni analitiche; se queste ultime si presentano sotto forma algebrica, la questione anzidetta è subito risoluta affermativamente. Essa si presenta invece molto più difficile quando si pervenga a relazioni analitiche che non si presentino sotto forma algebrica, giacchè si tratta allora di riconoscere se queste relazioni analitiche (per quanto riguarda la determinazione delle incognite in un caso determinato) possano essere rimpiazzate con relazioni algebriche; tale ricerca conduce invero ai più alti problemi dell' analisi (cfr. art. 14).

Noi vogliamo quì occuparci della seconda questione, dando un teorema generale sul grado delle equazioni algebriche risolubili con radicali quadratici. La questione non viene così esaurita (e per esaurirla si richiedono maggiori sviluppi); ma il resultato ottenuto basta alle applicazioni nel campo della Geometria elementare, che abbiamo in vista.

Fra queste applicazioni compariscono prima di tutto quelle relative alla costruzione dei poligoni regolari, che in questo stesso scritto trattiamo, e quelle relative ai problemi della duplicazione del cubo e della trisezione dell' angolo trattate nell' art. 13.

Gli antichi ci hanno tramandato le costruzioni elementari del poligono regolare di 2^n lati, del triangolo equilatero e del pentagono regolare, nonchè quelle dei poligoni regolari di $2^n . 3$ lati, $2^n . 5$ lati, $3 . 5$ lati, $2^n . 3 . 5$ lati, che dalle precedenti dipendono.

Ora si potrebbero cercare p. es. le costruzioni elementari dell' ettagono o del nonagono regolare, e mal ci si renderebbe ragione delle difficoltà a cui si andrebbe incontro, quando non venisse fatto di porre in dubbio la risolubilità di tali problemi. Si accumulerebbero quindi inutili sforzi, senza trarre neppure dall' insuccesso un insegnamento qualsiasi intorno alla natura delle questioni proposte.

Ma chi avesse acquistato la persuasione che si tratta di questioni irresolubili, come oserebbe tentare la prova pei casi successivi nei quali le difficoltà vanno apparentemente crescendo? Dopo avere constatato, o supposto, che non sono costruibili elementarmente i poligoni regolari di 7, 9, 11, 13, 14 lati, come potrebbe venir in mente di cercare la costruzione di quello di 17 lati? Eppure accade in fatto che la costruzione dell'ettadecagono è possibile, mentre sono impossibili (colla riga e col compasso) le costruzioni dei poligoni regolari di 7, 9, 11, 13, 14 lati.

Di ciò rende ragione la bellissima teoria di Gauss delle equazioni binomie.

La costruzione del poligono regolare di n lati viene a dipendere dalla risoluzione dell' equazione binomia

$$z^n = 1,$$

la quale, tolta la radice $z = 1$, si riduce alla

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + 1 = o.$$

Perchè lo ngono sia elementarmente costruibile occorre che la precedente equazione sia risolubile per radicali quadratici (nel campo di razionalità assoluto [1]). Ora tale risolubilità dipende dalla forma del numero n; precisamente l' equazione è risolubile se n, decomposto in fattori primi, è della forma

$$n = 2^v \left(2^{2^{v_1}} + 1\right) \left(2^{2^{v_2}} + 1\right) \ldots \left(2^{2^{v_s}} + 1\right)$$

ove $v_1\, v_s \ldots v_3$ sono tutti differenti fra loro.

In questa formula sono dunque racchiusi tutti i poligoni regolari costruibili elementarmente [1].

Diamo qualche notizia particolareggiata su tali poligoni nel § 9 di questo articolo; e terminiamo con un cenno relativo al problema dell' ettagono. Rimandiamo all' art. 12 per le svariate costruzioni dell' ettadecagono, di cui qui ci limitiamo a rilevare la possibilità teorica come conseguenza del teorema generale accennato.

Citeremo infine i principali lavori, ove si trovano svolte le teorie che formano oggetto del presente scritto, di cui ci siamo valsi nella compilazione di esso:

---

[1] Relativamente agli istrumenti da adoperarsi per le costruzioni il signor Hilbert ha osservato che l' uso del compasso può qui essere rimpiazzato dall' uso del *trasportatore di segmenti* (Cfr. art. 10).

1.° Intorno alle equazioni algebriche risolubili per radicali quadratici:

PETERSEN: « *Teorie delle equazioni algebriche* », trad. it. ROZZOLINO e SFORZA. Napoli, Pellerano, 1891-92. — F. KLEIN: « *Conferenze sopra alcune questioni di geometria elementare* », trad. it. GIUDICE. Torino, Rosenberg e Sellier, 1896. — CAPELLI: « *Lezioni di Algebra complementare* ». Pellerano, Napoli, 1895.

2.° Per la teoria delle equazioni binomie in relazione al problema dei poligoni regolari:

GAUSS: « *Disquisitiones arithmeticae* » sectio VII, Werke Bd I. (1801). — P. BACHMANN: « *Die Lehre von der Kreistheilung...* » Leipzig, Teubner, 1872. — F. KLEIN: *l. c.* — L. BIANCHI: « *Lezioni sulla teoria delle sostituzioni e delle equazioni algebriche secondo Galois* ». Pisa, Nistri, 1896.

I

§ 1. **Riduzione delle espressioni irrazionali quadratiche a forma normale.** — Consideriamo un' espressione (*quadratica*) x, formata con operazioni razionali e successive estrazioni di radicali quadratici a partire da certe quantità date 1, α, β... che definiscono il nostro campo di razionalità [1, α, β...]. Nella indicata espressione si troveranno *termini* contenenti un differente numero di radici sovrapposte, mediante i quali l' espressione stessa è razionalmente composta; diremo d' *ordine* m un termine nel quale figurano sotto uno stesso segno radicale altri $m - 1$ radicali. Così p. e.

$$\sqrt{a + \sqrt{b}}, \quad \sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}}, \quad \sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b + \sqrt{c}}},$$

dove a, b, c rappresentano espressioni razionali, sono termini rispett. degli ordini 2, 3, 4.

Un termine d' ordine m si può designare con $\sqrt{X}$, dove X è un' espressione quadratica formata con termini d' ordine minore od uguale ad $m - 1$.

Nell' espressione x si possono trovare dei termini d' ordine m, che sieno razionalmente esprimibili per i rimanenti termini d' ordine m e per quelli d' ordine inferiore; allora, rimpiazzando quei termini colle loro espressioni indicate, si può ridurre il numero dei termini che figurano in x.

Immaginiamo di avere effettuato ripetutamente finchè è possibile, tutte le riduzioni a cui danno luogo i termini d' ordine m costituenti x, quindi tutte le riduzioni a cui danno luogo i termini d' ordine $m - 1$, e così via; avremo allora un' espressione di x nella quale il numero dei termini non è ulteriormente riducibile, nessun termine essendo esprimibile razionalmente per i rimanenti termini dello stesso ordine o di ordine inferiore. Consideriamo partitamente ogni termine $\sqrt{X}$ di x, ed effettuiamo analogamente la riduzione di X al minimo numero dei termini. Proseguiamo nello stesso modo per ogni espressione che comparisca sotto qualche radicale in un termine di X, e così via. Fatte tutte le riduzioni possibili perveniamo infine ad una espressione di x, nella quale tutti i *radicali* sono *indipendenti*, sicchè il loro numero non è ulteriormente riducibile nel modo detto innanzi.

Per meglio spiegare la cosa prendiamo ad es.

$$x = \sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{ab}} + \sqrt{c} + \sqrt{d} + \sqrt{\frac{c}{d}}\,.$$

Possiamo rimpiazzare sotto il primo radicale

$$\sqrt{ab} \quad \text{con} \quad \sqrt{a}\,\sqrt{b}\,,$$

e ancora possiamo sostituire l' ultimo termine

$$\sqrt{\frac{c}{d}} \quad \text{con} \quad \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}}\,;$$

dopo effettuate queste riduzioni si ha l' espressione

$$x = \sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}} + \sqrt{c} + \sqrt{d} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}}$$

nella quale tutti i radicali sono indipendenti.

Dopo aver ridotto l' espressione di x a contenere radicali indipendenti, consideriamo in essa un termine del massimo ordine m, sia $\sqrt{X}$; la x si può riguardare come un' espressione razionale di $\sqrt{X}$ i cui coefficienti $a_1\ a_2 \ldots$, $b_1\ b_2 \ldots$ sono formati razionalmente cogli altri termini; dunque

$$x = \frac{a_1 + a_2 \sqrt{X} + a_3 (\sqrt{X})^2 + \ldots + a_n (\sqrt{X})^n}{b_1 + b_2 \sqrt{X} + b_3 (\sqrt{X})^2 + \ldots + b_m (\sqrt{X})^m}.$$

Ma poichè

$$(\sqrt{X})^2 = X, \quad (\sqrt{X})^4 = X^2 \ldots,$$

si potrà porre

$$x = \frac{l + m \sqrt{X}}{r + s \sqrt{X}},$$

dove l, m, r, s dipendono razionalmente dai termini d' ordine m, diversi da $\sqrt{X}$, e da termini d' ordine inferiore. Ora

$$x = \frac{l + m \sqrt{X}}{r + s \sqrt{X}} = \frac{(l + m \sqrt{X})\ (r - s \sqrt{X})}{(r + s \sqrt{X})\ (r - s \sqrt{X})},$$

$$= \frac{lr - msX}{r^2 - s^2 X} + \left(\frac{mr - ls}{r^2 - s^2 X}\right) \sqrt{X},$$

ossia

$$x = A + B \sqrt{X},$$

ove A e B dipendono razionalmente dagli altri termini d'ordine m, $\sqrt{Y}$, $\sqrt{Z} \ldots$, e da termini d' ordine inferiore.

Prendiamo a considerare successivamente le espressioni A e B. Ciascuna di esse, p. e. A, può essere posta

relativamente a $\sqrt{Y}$ sotto una forma analoga a quella ottenuta per x:

$$A = A_1 + A_2 \sqrt{Y},$$

dove A_1 e A_2 sono composti razionalmente con $\sqrt{Z}\ldots$, e con termini d'ordine minore di m.

Operando nello stesso modo sopra le nuove espressioni A_1, A_2 ecc., perveniamo infine a rappresentare la x con un' espressione intera dei termini d' ordine m

$$\sqrt{X},\ \sqrt{Y},\ \sqrt{Z}\ldots,$$

dove questi termini compariscono soltanto moltiplicati fra loro, ma non elevati a potenza; i coefficienti d'una tale espressione dipenderanno razionalmente da termini d' ordine minore di m.

È chiaro che la riduzione di forma operata relativamente ai termini d' ordine m, si può effettuare successivamente in relazione ai termini d' ordine $m - 1$, che entrano in x o nelle espressioni X, Y, $Z\ldots$, poi in relazione ai termini d' ordine $m - 2$ e così via. Giungeremo infine ad un' espressione di x che chiameremo *forma normale,* la quale sarà costruita (a partire da quantità razionali nel campo dato) con sole operazioni di somma, di moltiplicazione e di estrazione di radice quadrata, ciascun radicale quadratico figurando soltanto alla prima potenza.

I ragionamenti successivi che istituiremo sulle espressioni quadratiche si basano sull' ipotesi che esse sieno preliminarmente ricondotte a contenere *radicali indipendenti sotto forma normale;* il numero di questi radicali può allora designarsi col nome di *grado* dell' espressione quadratica.

§ 2. **Formazione di un' equazione algebrica a cui soddisfa un' espressione quadratica.** — *Un' espressione quadratica x, di grado n, soddisfa ad un' equazione alge-*

brica di grado 2^n, *a coefficienti razionali* (nel dato campo di razionalità).

Immaginiamo di dare agli n radicali che entrano nell' espressione x tutti i valori (positivi e negativi) che essi possono ricevere; otteniamo così 2^n valori di x: $x_1\ x_2 \ldots x_i \ldots x_{2^n}$, alcuni dei quali (come mostreremo fra poco) potranno essere uguali fra loro.

Costruiamo l' equazione

$$f(x) = (x - x_1)\ (x - x_2) \ldots (x - x_{2^n}) =$$
$$= x^{2^n} + p_1\, x^{2^n - 1} + \ldots + p_{2^n} = o$$

che ha per radici le x_i.

I coefficienti di tale equazione si esprimono colle funzioni simmetriche elementari delle x_i, per mezzo delle formule

$$p_1 = - \Sigma\, x_i$$
$$p_2 = \Sigma\, x_i\, x_k$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$p_{2^n} = x_1\, x_2 \ldots x_n\,.$$

Si tratta di provare che questi coefficienti sono razionali.

Questa proprietà risulta dal fatto fondamentale che le p_r sono funzioni *simmetriche* delle x_i, cioè che esse rimangono inalterate quando si permuti in un modo qualsiasi l' ordine delle x_i (p. es.

$$p_1 = -(x_1 + x_2 + \ldots + x_{2^n}) = -(x_2 + x_1 + x_3 + \ldots + x_{2^n}) \ldots).$$

Anzitutto, essendo le p_r funzioni simmetriche delle x_i, esse non dovranno alterarsi allorchè in un modo comunque determinato si cambiano i segni dei radicali che entrano nelle x_i, giacchè un tale cambiamento produce soltanto una permutazione nell' ordine delle x_i stesse. Se p. es.

$$x = \sqrt{a + \sqrt{b}}\,,$$

possiamo indicare i valori dell' espressione x con

$$x_1 = +\sqrt{a+\sqrt{b}}$$
$$x_2 = -\sqrt{a+\sqrt{b}}$$
$$x_3 = +\sqrt{a-\sqrt{b}}$$
$$x_4 = -\sqrt{a-\sqrt{b}},$$

ed allora si vede che cambiando il segno di $\sqrt{b}$, si permutano i valori di x_1, x_3 e di x_2, x_4; invece cambiando i segni di ambedue i radicali si permutano i valori di x_1, x_4 e di x_2, x_3; infine cambiando il segno del radicale esterno $\sqrt{a+\sqrt{b}}$, si permutano x_1, x_2 e x_3, x_4.

Ciò posto consideriamo p_r come un' espressione quadratica formata coi radicali che entrano nella x e supponiamo tale espressione posta sotto forma normale. Supposto che essa contenga termini d' ordine m, $\sqrt{X}$, $\sqrt{Y}$, $\sqrt{Z}$... poniamo in evidenza il termine $\sqrt{X}$, scrivendo

$$p_r = P + Q\sqrt{X}.$$

Poichè p_r non cambia mutando il segno di $\sqrt{X}$, avremo allora

$$P + Q\sqrt{X} = P - Q\sqrt{X},$$

ossia

$$Q\sqrt{X} = o,$$

e quindi

$$Q = o.$$

Dunque p_r non dipende dal radicale $\sqrt{X}$. In modo analogo essa non dipende neppure da $\sqrt{Y}$, $\sqrt{X}$..., e perciò in essa figurano termini contenenti radicali, d' ordine $m - 1$ al più.

Ma ripetendo il ragionamento precedente in relazione ai termini d' ordine $m - 1$, si vede che p_r non può dipendere neppure da questi. Così proseguendo successivamente si prova che p_r non dipende da nessun

radicale, ossia che p_r è un' espressione razionale (nel campo dato). Resta dunque stabilito che la $f(x) = o$ è un' equazione a coefficienti razionali *c.d.d.*

Abbiamo avvertito che fra i valori $x_1\ x_2 \ldots$ di x possono trovarsene alcuni uguali fra loro; se p. es.

$$x = \sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{b}},$$

risultano uguali i valori di x ottenuti cambiando il segno di $\sqrt{b}$.

Poniamo di scegliere, fra i 2^n valori della x, tutti i valori *differenti*; sieno p. es. $x_1\ x_2 \ldots x_r$. Allora l' equazione, di grado r,

$$\varphi(x) = (x - x_1)\ (x - x_2) \ldots (x - x_r) = o,$$

ha anch' essa i coefficienti razionali; la cosa si dimostra come per la $f(x) = o$.

Paragonando le due equazioni

$$f(x) = o \qquad \varphi(x) = o,$$

si vede che la prima ammette tutte le radici della seconda, e però essa è riducibile, se $r < 2^n$, avendosi

$$f(x) = \varphi(x)\ \psi(x),$$

ove $\psi(x)$ è un polinomio a coefficienti razionali.

§ 3. **Sul grado delle equazioni irriducibili risolubili per radicali quadratici.** — Dimostriamo anzitutto il teorema: *Se un' equazione algebrica a coefficienti razionali* (in un dato campo) *è soddisfatta da un valore dell' espressione quadratica x, essa è soddisfatta da tutti i valori della x ottenuti cambiando i segni dei radicali.*

Sia

$$F(x) = o,$$

l' equazione data.

Prendiamo x ridotta a contenere radicali indipendenti, e sotto forma normale, ponendo in evidenza un termine dell' ordine più alto m, $\sqrt{X}$:

$$x = A + B\sqrt{X}.$$

Sostituiamo questa espressione in F e riduciamo F a forma normale relativamente a $\sqrt{X}$, scrivendo

$$F(x) = L + M\sqrt{X};$$

L ed M dipendono razionalmente dagli altri termini di ordine m, $\sqrt{Y}$, $\sqrt{Z}$... e dai termini d' ordine inferiore che figurano in x.

Ora si ha (per ipotesi)

$$F(x) = L + M\sqrt{X} = o;$$

onde

$$L = M = o,$$

oppure

$$\sqrt{X} = -\frac{L}{M};$$

ma quest' ultima relazione contraddice all' ipotesi che tutti i radicali contenenti in x sieno indipendenti; resta dunque provato che

$$L = M = o,$$

e perciò

$$L - M\sqrt{X} = o,$$

onde l' equazione

$$F(x) = o$$

è soddisfatta non soltanto da

$$x = A + B\sqrt{X},$$

ma anche da

$$x = A - B\sqrt{X}.$$

In modo analogo si prova che la $F(x) = o$ è soddisfatta dai valori ottenuti mutando comunque nell' espressione di x, il segno dei termini d' ordine m, $\sqrt{Y}$, $\sqrt{Z}$...

Supponiamo, per semplicità di ragionamento, che in x entrino soltanto due termini dell' ordine m,

$$\sqrt{X} \text{ e } \sqrt{Y},$$

avremo

$$F(x) = L + M\sqrt{X}$$

con

$$L = L_1 + L_2\sqrt{Y}$$
$$M = M_1 + M_2\sqrt{Y},$$

e, dall' essere $F(x) = o$, concluderemo

$$L_1 = L_2 = M_1 = M_2 = o.$$

Ora L_1, L_2, M_1, M_2 sono espressioni contenenti soltanto termini in cui figurano radicali, d' ordine $m - 1$ al più; col ragionamento precedente si prova che queste espressioni si annullano cambiando comunque in x il segno dei radicali dei termini d' ordine $m - 1$; se ne deduce che la $F(x) = o$ è soddisfatta quando si cambino nell' espressione di x i segni dei radicali costituenti i termini dell' ordine $m - 1$.

È chiaro come il ragionamento si possa proseguire, pervenendo così alla conclusione che se l' equazione

$$F(x) = o$$

è soddisfatta da un valore dell' espressione quadratica x, essa è pure soddisfatta da tutti quei valori che si ottengono dal dato cambiando segno in modo arbitrario ai radicali costituenti i termini degli ordini

$$m,\ m - 1,\ m - 2, \ldots 1.$$

Resta da far vedere che la $F(x) = o$ è ancora soddisfatta se si cambiano i segni dei radicali che entrano sotto un altro radicale, p. es. i radicali costituenti i termini dell' espressione X che figura in $\sqrt{X}$. Ma ciò è stato già implicitamente dimostrato, perchè avendosi

$$F(x) = L + M\sqrt{X}$$

ove

$$L = M = o,$$

sarà sempre

$$F(x) = o,$$

comunque si cambi il segno dei radicali che figurarono in X.

Dunque il teorema è completamente stabilito.

Esso conduce immediatamente al corollario:

Se un' equazione algebrica

$$F(x) = o,$$

a coefficienti razionali, è soddisfatta da un valore di una espressione quadratica x, e se si designa con

$$\varphi(x) = o,$$

l' equazione (a coefficienti razionali) del medesimo grado r, a cui soddisfano tutti i valori differenti che la x può ricevere cambiando il segno dei radicali in essa contenuti, si ha

$$F(x) = \varphi(x)\ \theta(x),$$

ove θ è un polinomio a coefficienti razionali.

Se la $F(x) = o$ è un' equazione *irriducibile*, il polinomio θ si dovrà dunque ridurre ad un fattore costante.

Riprendiamo ora l' equazione $f(x) = o$ innanzi considerata, cioè l' equazione, del grado 2^n, che ha per radici i 2^n valori dell' espressione quadratica x.

Abbiamo già avvertito che, se $r < 2^n$, si ha

$$f(x) = \varphi(x)\ \psi(x)$$

ove ψ è un polinomio a coefficienti razionali. Ora l'equazione $\psi(x) = o$ ha per radici alcuni valori dell'espressione quadratica x, e quindi tutti i valori di essa; perciò si ha ancora

$$\psi(x) = \varphi(x)\ \psi_1(x) \quad \text{e} \quad f(x) = \varphi^2(x)\ \psi_1(x),$$

ove ψ_1 è un nuovo polinomio a coefficienti razionali, oppure una costante. Applichiamo a ψ_1 (supposto che non sia una costante) il ragionamento svolto relativamente a ψ, e così di seguito; in definitiva dovremo trovare un quoziente che si riduca ad una costante c, avendosi dunque

$$f(x) = c\varphi^s(x);$$

effettivamente la divisione non può procedere indefinitivamente avendo f un grado finito.

Ora avendosi, come si è detto,

$$f(x) = c\varphi^s(x),$$

ed essendo r il grado di φ, e 2^n il grado di f, sarà

$$rs = 2^n,$$

sicchè tanto r che s non contengono alcun fattore primo diverso da 2; in conclusione il grado dell'equazione

$$\varphi(x) = o$$

sarà

$$r = 2^\nu.$$

Da ciò, ricordando i precedenti resultati, si deduce il teorema fondamentale:

Se un' equazione algebrica irriducibile è risolubile con soli radicali quadratici (in un dato campo di razionalità cui appartengono i suoi coefficienti), il suo grado è una potenza di 2.

Questa condizione necessaria non è però sufficiente; così p. es. un' equazione generale del 4° grado non è risolubile per radicali quadratici.

Le condizioni a cui deve soddisfare un' equazione di grado 2^ν, affinchè sia risolubile per radicali quadratici, ed i procedimenti da adoperarsi in generale per la risoluzione effettiva, sono stati ampiamente studiati da Julius Petersen in vari lavori. (Cfr. p. es. la citata « *Teoria delle equazioni algebriche* »).

II

§ 4. **Riduzione del problema dei poligoni regolari alle equazioni binomie.** — Noi vogliamo applicare i resultati precedenti, relativi alle equazioni risolubili per quadratici, al problema della costruzione dei poligoni regolari.

Dobbiamo anzitutto tradurre il problema sotto forma analitica. E perciò cominciamo a ricondurlo a tal forma, che sieno dati dei punti, e si cerchino punti aventi con essi relazioni prestabilite.

Bastano a tal fine le seguenti osservazioni semplicissime:

a) Tutti gli ngoni regolari sono simili fra loro, quindi il problema di costruire lo ngono regolare che ha un lato assegnato si riconduce subito al problema di costruire un qualsiasi ngono regolare. L' incognita è l' angolo del poligono, o, se si vuole, l' angolo al centro che proietta un lato; il lato compare nella questione come un parametro arbitrario.

b) Quando si sappia costruire un ngono regolare, si può anche costruire lo ngono regolare iscritto in un dato circolo e avente un dato vertice, cioè si può *divi-*

dere il circolo in n archi uguali partendo da un punto di divisione assegnato, e viceversa.

Dunque il problema dei poligoni regolari è perfettamente equivalente a quello della divisione del circolo in n parti uguali, ove si può supporre che sieno dati il centro O del circolo ed un punto di divisione A. È lecito assumere la distanza dei due punti dati, cioè il raggio del circolo, come unità.

Sotto questa forma il problema, in cui i dati sono punti, è ricondotto alla ricerca di $n - 1$ punti (di divisione) che, insieme ad A, costituiscono i vertici di un ngono regolare.

Ciascuno di questi punti determina con A (in uno qualunque dei due sensi) un arco che moltiplicato per n dà un multiplo dell' intero circolo, cioè un arco

$$\frac{2\pi r}{n}$$

(ove si può prendere $r < n$).

Riferiamoci a due assi coordinati ortogonali, prendendo O come origine ed OA come asse delle x. Il punto A avrà come coordinate $1, o$; i punti incogniti avranno certe coordinate

$$x_1 y_1 , \quad x_2 y_2 \quad \ldots \quad x_{n-1} y_{n-1} ,$$

(soddisfacenti all' equazione

$$x^2 + y^2 = 1$$

del circolo), coordinate che appunto si tratta di determinare, partendo dalle sole quantità date o, 1, le quali definiscono il campo di razionalità assoluto [1].

Immaginiamo rappresentati nel piano i valori della variabile complessa

$$z = x + iy$$

(rappresentazione di Argand-Gauss). A ciascun valore z, corrispondono (come è noto) un *modulo*

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e un *argomento*

$$\theta = \text{arc } tg \frac{y}{z},$$

coordinate polari del punto (xy) indice di z, sicchè si ha

$$z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta).$$

Il modulo è la distanza assoluta del punto (xy) dall' origine *(raggio vettore)*; l' argomento è l' angolo *(anomalia)* che la congiungente il punto stesso coll' origine forma coll' asse x.

Ora la moltiplicazione di due numeri complessi

$$z = x + iy, \quad z' = x' + iy'$$

si può effettuare: algebricamente, secondo le ordinarie regole del calcolo, ponendo

$$Z = zz' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y);$$

oppure geometricamente, determinando il punto che ha come coordinate polari

$$P = \rho\rho' = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

$$\Theta = \theta + \theta' = \arg tg \frac{y}{z} + \text{arc } tg \frac{y'}{z'},$$

cioè facendo il prodotto dei moduli e la somma degli argomenti.

Applicando questa regola geometrica, formiamo le successive potenze dei numeri complessi

$$z_s = x_s + iy_s,$$

aventi come indici i nostri punti incogniti

$$(x_1 y_1), \ldots (x_{n-1}\ y_{n-1}).$$

Il modulo

$$\sqrt{x_s^2 + y_s^2} = 1\,,$$

e l' argomento è

$$\frac{2\pi r}{n}$$

$$\left(\text{onde } z_s = \cos\frac{2\pi r}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi r}{n}\right)$$

quindi il modulo di z_s^n sarà sempre $= 1$, mentre il suo argomento sarà

$$\frac{2\pi r h}{n}\,.$$

In particolare per $h = n$, il punto z_s^n si troverà sulla parte positiva dell' asse delle x, e quindi coinciderà con

$$A \equiv (1o)\,;$$

per conseguenza

$$z_s^n = 1.$$

Viceversa si abbia un punto (xy), diverso dal punto A, tale che

$$z^n = (x + iy)^n = 1\,;$$

questo punto deve avere un modulo ρ tale che $\rho^n = 1$; e quindi un modulo $= 1$; inoltre esso deve avere un argomento θ che moltiplicato per n differisca da o per multipli di 2π, onde

$$\theta = \frac{2\pi r}{n}\,;$$

dunque il detto punto è uno dei punti

$$(x_1 y_1) \ldots (x_{n-1}\ y_{n-1})$$

che soddisfano al nostro problema.

In conclusione:

Il problema della costruzione di un ngono regolare, viene a dipendere dalla risoluzione dell' equazione binomia

$$z^n = 1,$$

e precisamente dalla ricerca delle radici di essa diverse da $z = 1$, *cioè dalla risoluzione dell' equazione*

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + 1 = o.$$

Questa equazione si può scindere in due altre relative ad x e y; ma ciò non è necessario, nè utile. Se l' equazione indicata in z può essere risoluta per radicali quadratici (nel campo di razionalità [1] dato dai coefficienti), anche le coordinate z, y dei punti incogniti verranno espresse per radicali quadratici, giacchè si ha

$$\sqrt{a + ib} = \sqrt{\frac{a}{2} + \sqrt{a + b^2}} + i\sqrt{\frac{a}{2} + \sqrt{a + b^2}}),$$

e quindi lo ngono sarà costruibile colla riga e col compasso. Viceversa se lo ngono è costruibile, le x, y sono espressioni quadratiche e quindi anche le radici

$$z = x + iy$$

dell' equazione binomia, risulteranno pure esprimibili per radicali quadrati.

Il problema della costruzione elementare dei poligoni regolari è così ricondotto alla questione di risolvere (quando sia possibile), per radicali quadratici, l' equazione binomia

$$z^n = 1.$$

§ 5. **Irriducibilità dell' equazione** $\frac{z^p - 1}{z - 1} = o$, **quando** p **è un numero primo.** — Consideriamo l' equazione

$$z^p - 1 = o$$

nell' ipotesi in cui p sia un numero primo. Togliendo il fattore lineare $z - 1$, essa si riduce alla forma

$$F(z) = \frac{z^p - 1}{z - 1} = z^{p-1} + z^{p-2} + \ldots + z + 1 = o.$$

Noi vogliamo dimostrare che questa equazione è irriducibile, nel campo assoluto di razionalità [1], cioè che $F(z)$ non può spezzarsi nel prodotto di due polinomi a coefficienti (numerici) razionali.

A tale scopo occorre premettere un lemma sopra la decomponibilità dei polinomi, lemma dovuto a Gauss.

Si abbia un polinomio

$$f(z) = a_o z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n,$$

i cui coefficienti sieno numeri interi; diremo che questo polinomio è *primitivo* allorchè i numeri $a_o a_1 \ldots a_n$ non ammettono alcun divisore comune, diverso dall' unità.

Ora sieno

$$f(z) = a_o z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n,$$

e

$$\varphi(z) = b_o z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m$$

due polinomi a coefficienti interi, primitivi. Formiamo il prodotto

$$F(x) = f(x)\ \varphi(x) = c_o z^{m+n} + c_1 z^{m+n-1} + \ldots c_{mtn},$$

dove

$$c_o = a_o b_o$$
$$c_1 = a_o b_1 + a_1 b_o,$$

e in generale

$$c_h = a_o b_h + a_1 b_{h-1} + \ldots + a_h b_o,$$

coll' avvertenza che

$$a_r = o \text{ per } r > n,$$
$$b_s = o \text{ per } s > m.$$

Mostriamo che il polinomio $F(x)$ è primitivo, cioè che non esiste alcun numero primo p (>1), il quale divida tutti i numeri $c_0, c_1 \dots c_{m+n}$.

Dato un numero primo p (>1), questo non può dividere tutti i coefficienti a di f, nè i coefficienti b di φ; si troverà dunque un primo coefficiente a_r

$$(\text{con } r \leq n)$$

e così un primo coefficiente b_s

$$(\text{con } s \leq m)$$

i quali non saranno divisibili per p. Allora consideriamo il coefficiente

$$c_{r+s} = a_0 b_{r+s} + \dots + a_{r-1} b_{s+1} + a_r b_s + a_{r+1} b_{s-1} + \\ + \dots + a_{r+s} b_0.$$

Tutti i termini della somma sono divisibili per p, tranne $a_r b_s$; dunque c_{r+s} non è divisibile per p.

L'osservazione precedente ci permette di dimostrare il

Lemma di Gauss — *Se un polinomio a coefficienti interi $F(z)$ è riducibile, esso può decomporsi nel prodotto di due polinomi a coefficienti interi.*

Possiamo supporre, senza restrizione, che F sia un polinomio primitivo, altrimenti esso potrebbe porsi sotto la forma $\mu F'$ ove F' è primitivo e μ è un numero intero (divisore comune dei coefficienti di F), sicchè basterebbe evidentemente dimostrare il teorema per F'.

Riduciamo tutti i coefficienti di b ad avere il minimo comun denominatore a; i numeratori avranno allora un massimo comun divisore α primo con a. Operiamo nello stesso modo sui coefficienti di φ, riducendoli ad avere un minimo comun denominatore b; sia β il massimo comun divisore dei numeratori dei coefficienti così ridotti. Allora

i polinomi $\frac{af}{\alpha}$ e $\frac{b\varphi}{\beta}$ avranno i coefficienti interi e saranno primitivi; il loro prodotto

$$\frac{ab}{\alpha\beta} f\varphi = \frac{ab}{\alpha\beta} F$$

sarà dunque un polinomio a coefficienti interi e primitivo.

Per la prima condizione, poichè i coefficienti di F non ammettono alcun divisore comune, ogni fattore primo contenuto in $\alpha\beta$ dovrà dividere ab, e perciò $\alpha\beta$ dividerà ab; per la seconda il quoziente $\frac{ab}{\alpha\beta} = c$ (che come si è detto è un numero intero) dovrà essere uguale ad 1, altrimenti tutti i coefficienti di cF sarebbero divisibili per $c > 1$.

In conclusione $F(z)$ è il prodotto di due polinomi a coefficienti interi e primitivi $\frac{a}{\alpha} f$ e $\frac{b}{\beta} \varphi$ *c. d. d.*

In base al lemma di Gauss, si può facilmente dimostrare, usando del ragionamento di Eisenstein [1], che:

L' equazione $\frac{z^p - 1}{z - 1} = o$, *dove* p *è un numero primo, è irriducibile.*

Ponendo

$$z = x + 1$$

l' equazione predetta diventa

$$F(x) = x^{p-1} + px^{p-2} + \frac{p(p-1)}{2} x^{p-3} + \ldots + \\ + \binom{p}{r} x^{p-r-1} + \ldots + p = o.$$

---

[1] « Crelle 's Journal - Bd. 39 » pag. 167. Due diverse dimostrazioni dello stesso teorema sono state date da Kronecher « Crelle 's J. - Bd. 29 », e « Journal de Liouville 12, vol. 1 ». Cfr. Bachmann, *l. c.*

Basta evidentemente dimostrare l' irriducibilità della $F(x) = o$, perchè dall' essere

$$\frac{z^p - 1}{z - 1} = \varphi_1(z) \cdot f_1(z)$$

ove φ_1, f_1 sono due polinomi, segue

$$F(x) = \varphi_1(x+1)\ f_1(x+1) = \varphi(x)\, f(x),$$

ove φ e f sono due polinomi in x.

Supponiamo che la $f(x) = o$ sia riducibile, allora si avrà

$$f(x) = \varphi(x)\, f(x)$$

ove φ e f sono due polinomi in x, a coefficienti interi:

$$f(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$
$$\varphi(x) = b_o x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m\,.$$

Eseguendo il prodotto φf si troverà un polinomio identicamente uguale ad F:

$$c_o x^{n+m} + c_1 x^{n+m-1} + \ldots + c_{n+m},$$

il cui grado $n + m = p$.

Si avranno dunque le formule:

$$c_o = a_o b_o = 1$$
$$c_1 = a_o b_1 + a_1 b_o = p$$
$$c_2 = a_o b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_o = \frac{p(p-1}{2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c_{n+m-1} = a_{n-1} b_m + a_n b_{m-1} = \frac{p(p-1)}{2}$$
$$c_{n+m} = a_n b_m = p\,,$$

e perciò tutti i coefficienti c, eccetto c_o, saranno divisibili per il numero primo p.

Ora l' ultima relazione scritta, appunto perchè p è un numero primo, porta che uno dei due numeri a_n, b_m sia uguale ± 1, e l' altro a $\pm p$; sia p. e.

$$a_n = 1 \qquad b_m = p\,.$$

Sostituendo questi valori nella penultima relazione si trova

$$c_{n+m-1} = a_{n-1}p + b_{m-1},$$

e poichè p divide c_{n+m-1}, b_{m-1} è divisibile per p, ossia:

$$b_{m-1} = pb'_{m-1}.$$

Proseguendo analogamente a considerare l' espressione di c_{n+m-2}, si trova

$$c_{n+m-2} = a_{n-2}p + a_{n-1}b'_{m-1}p + b_{m-2},$$

e quindi b_{m-2} è divisibile per p, ossia:

$$b_{m-2} = pb'_{m-2}.$$

Successivamente dalle espressioni di $c_{n+m-3} \ldots c_n$ si ricava che sono divisibili per p tutti i coefficienti $b_{m-3} \ldots b_o$, ma la conclusione che si riferisce a b_o si rivela subito assurda perchè l' uguaglianza

$$c_o = a_o \quad b_o = 1$$

dà

$$a_o = \pm 1, \quad b_o = \pm 1.$$

L' assurdo a cui si è condotti dall' ipotesi della decomponibilità di F, prova che l' equazione $F = o$, e quindi la

$$\frac{z^p - 1}{z - 1} = o$$

è irriducibile *c. d. d.*

§ 6. **Impossibilità di costruire elementarmente i poligoni regolari di un numero primo p di lati, quando p non ha la forma $2^n + 1$.** — Ora ricordando il risultato fondamentale del § 3, concludiamo:

Se l'equazione $\frac{z^p - 1}{z - 1} = o$, *ove* p *è un numero primo è risolubile per radicali quadratici, deve essere* $p - 1$ *una potenza del* 2:

$$p = 2^n + 1.$$

E per conseguenza:

Non è possibile costruire colla riga e col compasso il poligono regolare avente un numero primo p *di lati, quando* p *non sia della forma* $2^n + 1$.

Così ad es. *non sono costruibili*, nel modo anzidetto, i poligoni regolari di 7, 11, 13, 19... lati.

§ 7. **Costruibilità dei poligoni regolari di un numero primo** p **di lati, quando** p **ha la forma** $2^n + 1$. — A questo resultato negativo fa riscontro il seguente resultato positivo:

Il poligono regolare di p *lati ove* p *è un numero primo della forma* $2^n + 1$, *è costruibile colla riga e col compasso.*

Per dimostrare questo teorema, occorre far vedere che l' equazione (irriducibile)

$$\frac{z^p - 1}{z - 1} = z^{p-1} + z^{p-2} + \ldots + z + 1 = o,$$

è risolubile con successive estrazioni di radici quadrate, quando p è un numero primo della forma $2^n + 1$.

Le radici della nostra equazione, cioè le radici p^{me} dell' unità, diverse da 1, sono

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{p} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{p},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varepsilon_r = \cos\frac{2\pi r}{p} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi r}{p},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varepsilon_{p-1} = \cos\frac{2\pi(p-1)}{p} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi(p-1)}{p}.$$

Esse possono ottenersi tutte formando le successive potenze di una qualunque radice ε. Partendo p. es. dalla radice $\varepsilon = \varepsilon_1$, avremo infatti $\varepsilon_r = \varepsilon^r$.

Partendo dalla radice $\varepsilon = \varepsilon_2$, avremo

$$\varepsilon_2 = \varepsilon \quad \varepsilon_4 = \varepsilon^2 \quad \varepsilon_6 = \varepsilon^3 \quad \ldots \quad \varepsilon_{p-1} = \varepsilon^{\frac{p-1}{2}},$$

$$\varepsilon_{\ } = \varepsilon^{\frac{p-1}{2}+1} \quad \varepsilon_3 = \varepsilon^{\frac{p-1}{2}+2} \quad \varepsilon_7 = \varepsilon^{\frac{p-1}{2}+3}$$

$$\ldots \varepsilon_{p-2} = \varepsilon^{p-1}.$$

In modo analogo le potenze successive di una qualunque $\varepsilon = \varepsilon_r$, cogli esponenti $1, 2 \ldots p-1$, sono tutte diverse fra loro, e quindi riproducono (in altro ordine) le radici $\varepsilon_1 \; \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{p-1}$. Invero non può aversi per $h < p$, $k < p$,

$$\varepsilon_r{}^h = \varepsilon_r{}^k,$$

senza che si abbia

$$\varepsilon_r{}^{h-k} = 1$$

cioè

$$\cos \frac{2\pi r(h-k)}{p} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi r(h-k)}{p} = 1,$$

onde

$$2\pi \frac{r(h-k)}{p} = 2\pi s$$

con s intero; e questa uguaglianza è assurda perchè, essendo p un numero primo ed $r < p$, p non può dividere $r(h-k)$ senza dividere $h-k$.

Si noti ancora che sussiste sempre l' uguaglianza

$$\varepsilon^{l+mp} = \varepsilon^l,$$

essendo

$$\varepsilon^{mp} = 1.$$

Volendo ora approfondire lo studio delle radici della nostra equazione, ci occorre prendere dalla teoria dei numeri il seguente teorema [1]:

Dato un numero primo p, esiste sempre fra i numeri $1, 2 \ldots p-1$, *qualche numero g, tale che le potenze*

$$g,\ g^2, \ldots g^{p-1},$$

divise per p, dieno per resti i numeri

$$1, 2 \ldots p-1$$

presi in altro ordine.

Un tal numero g si dice una *radice primitiva* del *modulo p.*

Se ad esempio $p = 5$, prendendo a considerare il numero 2 si ha

$$2^1 = 2,\ \ 2^2 = 4,\ \ 2^3 = 8,\ \ 2^4 = 16,$$

e questi numeri divisi per 5 danno rispettivamente come resti

$$2,\ \ 4,\ \ 3,\ \ 1,$$

onde 2 è una radice primitiva del modulo 5.

Nel caso di $p = 7$, formando le potenze successive del 2 si ottengono i numeri

$$2^1 = 2,\ \ 2^2 = 4,\ \ 2^3 = 8,\ \ 2^4 = 16,\ \ 2^5 = 32,\ \ 2^6 = 66,$$

che divisi per z danno come resti

$$2,\ \ 4,\ \ 1,\ \ 2,\ \ 4,\ \ 1,$$

e quindi 2 non è una radice primitiva del modulo 7. Invece le successive potenze del 3

$$3^1 = 3,\ \ 3^2 = 9,\ \ 3^3 = 27,\ \ 3^4 = 81,\ \ 3^5 = 243,\ \ 3^6 = 729$$

---

[1] Cfr. p. es. U. Scarpis: *Primi elementi della teoria dei numeri.* Hoepli 1897.

divise per 7 danno come resti

$$3, \quad 2, \quad 6, \quad 4, \quad 5, \quad 1,$$

onde il numero 3 è una radice primitiva del modulo 7.

Riferendoci al caso generale di un qualsivoglia numero p, supponiamo di aver determinato una radice primitiva g del modulo p, e consideriamo nuovamente una radice ε dell' equazione

$$\frac{z^p - 1}{z - 1} = o.$$

Formando le successive potenze

$$\varepsilon^g \quad \varepsilon^{g^2} \quad \varepsilon^{g^3} \ldots \varepsilon^{g^{p-1}},$$

vediamo che queste riproducono in altro ordine le radici

$$\varepsilon \quad \varepsilon^2 \ldots \varepsilon^{p-1}.$$

Infatti, indicando con s_r il resto della divisione di g^r per per p, avremo

$$(g^r = ph + s_r)$$

$$\varepsilon^{g^r} = \varepsilon^{s_r} \quad (\varepsilon^{ph} = 1),$$

dove s_r prende (in altro ordine) tutti i valori $1, 2 \ldots p - 1$, mentre r riceve successivamente i valori $1, 2 \ldots p - 1$.

Ora dividiamo le radici

$$\varepsilon^g \quad \varepsilon^{g^2} \quad \ldots \quad \varepsilon^{g^{p-1}}$$

in due gruppi

$$\varepsilon^g \quad \varepsilon^{g^3} \quad \ldots \quad \varepsilon^{g^{p-2}}$$

$$\varepsilon^{g^2} \quad \varepsilon^{g^4} \quad \ldots \quad \varepsilon^{g^{p-1}},$$

e poniamo

$$\eta_1 = \varepsilon^g + \varepsilon^{g^3} + \ldots + \varepsilon^{g^{p-2}}$$

$$\eta_2 = \varepsilon^{g^2} + \varepsilon^{g^4} + \ldots + \varepsilon^{g^{p-1}}$$

Dividiamo successivamente ciascuno dei gruppi formati innanzi, in altri due, ponendo

$$\left.\begin{aligned}\eta_{11} &= \varepsilon^{g} + \varepsilon^{g^5} + \ldots + \varepsilon^{g^{p-4}} \\ \eta_{12} &= \varepsilon^{g^3} + \varepsilon^{g^7} + \ldots + \varepsilon^{g^{p-2}}\end{aligned}\right\} \eta_{11} + \eta_{12} = \eta_1$$

$$\left.\begin{aligned}\eta_{21} &= \varepsilon^{g^2} + \varepsilon^{g^6} + \ldots + \varepsilon^{g^{p-3}} \\ \eta_{22} &= \varepsilon^{g^4} + \varepsilon^{g^8} + \ldots + \varepsilon^{g^{p-1}}\end{aligned}\right\} \eta_{21} + \eta_{22} = \eta_2 .$$

In questo modo si può seguitare formando successivamente delle somme di

$$\frac{p-1}{4}, \quad \frac{p-1}{8} \ldots$$

termini, arrivando infine (*poichè* $p-1$ *è una potenza del* 2) a somme di un solo termine, cioè alle radici della nostra equazione. Le somme sopra indicate prendono il nome di *periodi di Gauss.* Noi mostreremo come questi periodi si possono calcolare con successive estrazioni di radici quadrate.

Osserviamo anzitutto che la somma

$$\eta_1 + \eta_2 = \eta = \varepsilon^{g} + \varepsilon^{g^2} + \ldots + \varepsilon^{g^{p-1}} = -1 ,$$

giacchè η è, a parte il segno, il coefficiente di z^{p-2} nella equazione

$$z^{p-1} + z^{p-2} + \ldots + 1 = o$$

di cui le ε sono radici.

Consideriamo il prodotto $\eta_1 \, \eta_2$.

Eseguendo la moltiplicazione delle due somme costituenti η_1 e η_2, si ottiene una somma di termini del tipo

$$\varepsilon^{g^r} \, \varepsilon^{g^s} = \varepsilon^{g^r + g^s} = \varepsilon^{h} = \varepsilon^{g^t} ,$$

cioè una somma di termini ciascuno dei quali si trova in uno dei due gruppi costituenti η_1 o η_2.

Ora l' espressione

$$\eta_1 \eta_2 = \Sigma \varepsilon^{g^t}$$

non cambia quando in essa si sostituisca ε con ε^g, perchè una tale sostituzione produce soltanto (come è facile verificare) lo scambio di

$$\eta_1 \text{ con } \eta_2 \text{ e di } \eta_2 \text{ con } \eta_1.$$

Questo fatto fondamentale porta di conseguenza che la somma $\Sigma \varepsilon^{g^t}$ contiene uno stesso numero ρ di volte ogni radice dell' equazione

$$\frac{z^p - 1}{z - 1} = o,$$

e quindi si ha

$$\eta_1 \eta_2 = \Sigma \varepsilon^{g^t} = \rho \eta = -\rho.$$

Per vedere chiaramente come si arrivi a tale conseguenza, cominciamo a raggruppare nella somma i termini simili, scrivendo

$$\eta_1 \eta_2 = k \varepsilon^{g^r} + \lambda \varepsilon^{g^s} + \ldots,$$

e mostriamo che i coefficienti interi k, $\lambda \ldots$ sono tutti uguali fra loro, al quale scopo basta mostrare che nessuno di essi può essere inferiore ad un altro arbitrariamente scelto.

Se ad es. nella anzidetta somma entra il termine $\rho \varepsilon^g$; sostituendo in esso ε con ε^g, si troverà il termine $\rho \varepsilon^{g^2}$ e da questo si dedurranno successivamente i termini $\rho \varepsilon^{g^3}$, $\rho \varepsilon^{g^4} \ldots$, che dovranno tutti comparire nella somma stessa. Se nella somma compare il termine $\rho \varepsilon^{g^2}$, sostituendo in esso ε con ε^g ed operando successivamente la

medesima sostituzione nei termini via via ottenuti, troveremo i termini

$$\rho\varepsilon^{g^3},\ \rho\varepsilon^{g^4}\ldots\rho\varepsilon^{g^{p-1}},\ \left(\rho\varepsilon^{g^p}=\rho\varepsilon^{g}\right)$$

i quali tutti dovranno comparire similmente nella somma stessa.

E così in generale dall' esistenza del termine $\rho\varepsilon^{g^t}$ si deduce che la somma deve contenere tutti i termini

$$\rho\varepsilon^{g^{t+1}}\ \rho\varepsilon^{g^{t+2}}\ldots\rho\varepsilon^{g^{t+p-1}}$$

i quali riproducono in altro ordine

$$\rho\varepsilon^{g}\ \rho\varepsilon^{g^2}\ldots\rho\varepsilon^{g^{p-1}}.$$

Dunque abbiamo che $\eta_1+\eta_2$ ed $\eta_1\eta_2$ sono numeri interi, e perciò η, η_2 soddisfano ad un' equazione di 2.° grado:

$$x^2+x-\rho\equiv o$$

a coefficienti interi.

Tale equazione si risolve coll' estrazione del radicale $\sqrt{1+4\rho}$, per mezzo del quale η_1 e η_2 vengono espressi.

Procediamo ora al calcolo dei periodi di $\frac{p-1}{4}$ termini

$$\eta_{11},\ \eta_{12},\ \eta_{21},\ \eta_{22}.$$

Si ha anzitutto

$$\eta_{11}+\eta_{12}=\eta_1,\quad \eta_{21}+\eta_{22}=\eta_2.$$

Ora formiamo i prodotti

$$\eta_{11}\,\eta_{12},\qquad \eta_{21}\,\eta_{22}.$$

Considerando ad es. il primo di questi prodotti, vediamo che esso può ridursi ad una somma di termini del tipo ε^{g^t}, e precisamente ad una somma che non

cambia quando si sostituisca in ogni termine ε con ε^{g^2}; infatti per tale sostituzione i periodi η_{11} e η_{12} vengono soltanto scambiati l'uno coll'altro. Da ciò si desume (come innanzi) che se l'espressione di $\eta_{11}\,\eta_{12}$ contiene un certo numero ρ_1 di volte un termine di η_1, essa contiene altrettante volte gli altri termini della stessa somma (se ad es. $\eta_{11}\,\eta_{12}$ contiene il termine $\rho_1\varepsilon^g$, contiene pure $\rho_1\varepsilon^{g^3}$, $\rho_1\varepsilon^{g^5}\ldots$); analogamente se l'espressione suddetta contiene ρ_2 volte un termine di η_2, essa contiene ρ_2 volte tutti gli altri termini, sicchè

$$\eta_{11}\,\eta_{12} = \rho_1\eta_1 + \rho_2\eta_2$$

ove ρ_1 e ρ_2 sono numeri interi.

Quindi η_{11}, η_{12} sono radici dell'equazione di 2.° grado

$$x^2 - \eta_1 x + (\rho_1\eta_1 + \rho_2\eta_2) = o\,.$$

Così $\eta_{11}\,\eta_{12}$ si possono calcolare coll'estrazione d'una radice quadrata, partendo da η_1, η_2. Analogamente si ottengono η_{21}, η_{22}.

È chiaro ormai come si possa procedere successivamente al calcolo dei periodi di $\frac{p-1}{8}$ termini.

Considerando ad es. η_{111}, η_{112}, la loro somma è

$$\eta_{111} + \eta_{112} = \eta_{11}\,,$$

ed il loro prodotto si esprime con una combinazione lineare a coefficienti interi di η_{11}, η_{12}, η_{21}, η_{22}; così $\eta_{111}\,\eta_{112}$ si ottengono coll'estrazione d'un nuovo radicale quadratico che porta sopra i periodi ottenuti innanzi.

Proseguendo nello stesso modo si possono costruire i periodi di

$$\frac{p-1}{16}\,,\quad \frac{p-1}{32}\ldots$$

termini, e finalmente i periodi di un termine

$$\left(\frac{p-1}{2^n}=1\right),$$

cioè le radici ε dell' equazione proposta.

Possiamo dunque concludere: *Quando p è un numero primo della forma 2^n+1, l' equazione*

$$\frac{z^p-1}{z-1}=o$$

si può risolvere con successive estrazioni di radici quadrate, quindi il poligono regolare di p lati è costruito colla riga e col compasso.

Osservazione — Nel ragionamento precedente non abbiamo tenuto conto dell' ambiguità che si presenta nella scelta dei segni da attribuirsi ai radicali quadratici successivamente introdotti. E di tale ambiguità non occorre invero preoccuparsi, quando si ha in vista di mostrare soltanto come i periodi η possono esprimersi mediante radicali quadratici, e quindi la stessa equazione data $\frac{z^p-1}{z-1}=o$ sia risolubile mediante i radicali suddetti. Procedendo alla risoluzione effettiva, ove si lasci sussistere l' indeterminatezza dei segni dei nominati radicali, si troveranno tutte le radici ε dell' equazione proposta. Ma se venisse assegnata a priori una particolare radice ε per la costruzione dei periodi η, volendo giungere al calcolo di essa, si dovrebbe via via determinare i segni suindicati in modo conveniente. Le particolari regole di determinazione che quì occorrono, si troveranno spiegate, pel caso $p=17$, nell' art. 12, ove hanno un interesse per la costruzione effettiva dell' ettadecagono.

§ 8. **Sui numeri primi della forma 2^n+1.** — I resultati ottenuti diventano più espressivi in forza della seguente osservazione:

Ogni numero primo della forma $2^n + 1$ *è un numero della forma* $2^{2^\nu} + 1$, vale a dire se $2^n + 1$ è un numero primo, n deve essere, alla sua volta, una potenza del 2.

Per giustificare questa proposizione, basta notare che se n ammette qualche divisore dispari

$$2k + 1 \quad [n = h(2^k + 1)],$$

il numero

$$2^n + 1 = 2^{h(2k+1)} + 1$$

non può essere primo.

Ora si riconosce subito che il numero $2^{h(2k+1)}$ non può esser primo, essendo divisibile per $2^h + 1$. Infatti il binomio

$$x^{2h+1} + 1$$

si annulla per $x = -1$ e perciò è divisibile per $x + 1$:

$$x^{2h+1} + 1 = (x+1)\ [x^{2h} - x^{2h-1} + \ldots$$
$$+ (-1)^r\ x^{2h-2} + \ldots + 1]:$$

facendo

$$x = 2^h$$

si ha appunto che $2^{h(2k+1)} + 1$ è divisibile per $2^h + 1$.

Ora i resultati dei numeri precedenti si possono enunciare dicendo:

I poligoni regolari di un numero primo p *di lati, costruibili colla riga e col compasso, sono quelli per cui* p *è della forma*

$$p = 2^{2^\nu} + 1\,.$$

Per vedere la portata di questo enunciato, diamo a ν i valori

$$\nu = o,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4;$$

otteniamo i numeri primi

$$p = 2^{2^\nu} + 1 = 3,\ 5,\ 17,\ 257,\ 65537$$

I valori $p = 3, 5$ corrispondono ai casi notissimi del triangolo equilatero e del pentagono regolare; mentre i valori successivi danno luogo a tre nuovi poligoni regolari costruibili, fra i quali è particolarmente notevole il caso $p = 17$. La risoluzione dell' equazione binomia $z^{17} = 1$ fu data dal Gauss, ed alle costruzioni geometriche dell' ettadecagono si volsero successivi lavori (Legendre, Grunert, Staudt, Serret, Schröter, Gérard) dei quali è dato un resoconto nell' art. 12.

Il caso $p = 257$ fu studiato da Richelot (1), i resultati di lui furono interpretati geometricamente dal sig. Affolter e dal sig. Pascal (2).

Il caso $p = 65537$ è stato oggetto di un accuratissimo studio del sig. Hermes (3).

Ora che cosa accade per $\nu > 4$? Si otterranno ancora dei numeri primi

$$p = 2^{2^\nu} + 1,$$

e quindi dei nuovi poligoni regolari costruibili?

I casi finora studiati si riferiscono ai numeri corrispondenti a

$$\nu = 5, 6, 7,$$

cioè ai numeri

$$2^{2^5} + 1, 2^{2^6} + 1, 2^{2^7} + 1,$$

i quali sono composti.

Pertanto resta dubbio se la serie dei numeri

$$2^{2^\nu} + 1$$

comprenda altri numeri primi, all' infuori di quelli corrispondenti ai valori

$$\nu = 0, 1, 2, 3, 4.$$

---

(1) *Crelle's Journal*, Bd. 9.

(2) *Rendic. della R. Accademia di Napoli*, 1887.

(3) Cfr. Göttinger, *Nachrichten*, 1894.

§ 9. **Applicazione del metodo di Gauss al caso del pentagono regolare.** — Daremo infine, come esempio, l' applicazione del metodo esposto alla risoluzione dell' equazione

$$z^5 = 1,$$

da cui dipende la costruzione del pentagono regolare.

Le radici della equazione predetta sono

$$1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4,$$

ove

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}.$$

Scegliamo una radice primitiva del modulo 5, e sia $g = 2$; allora le ε verranno ordinate nel modo seguente:

$$\varepsilon^2, \varepsilon^4, \varepsilon^8 = \varepsilon^3, \varepsilon^{16} = \varepsilon.$$

I periodi binari sono dati da

$$\eta_1 = \varepsilon^2 + \varepsilon^3, \quad \eta_2 = \varepsilon^4 + \varepsilon;$$

e si ha

$$\eta_1 + \eta_2 = \eta = -1$$

$$\eta_1\eta_2 = (\varepsilon^2 + \varepsilon^3)\ (\varepsilon^4 + \varepsilon) = \varepsilon^6 + \varepsilon^3 + \varepsilon^7 + \varepsilon^4 =$$
$$= \varepsilon + \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 = \eta = -1,$$

onde η_1 e η_2 sono le radici dell' equazione

$$x^2 + x - 1 = o,$$

cioè

$$\eta_1 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$\eta_2 = -\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Consideriamo i periodi di un termine

$$\eta_{21} = \varepsilon^4 \qquad \eta_{22} = \varepsilon\,,$$

dove

$$\eta_{21} + \eta_{22} = \eta_2$$
$$\eta_{21}\,\eta_{22} = \varepsilon^5 = 1\,,$$

costruiremo l' equazione di 2.° grado

$$x^2 - \eta_2 x + 1 = o,$$

e risolvendola otterremo

$$\varepsilon = \frac{1}{4}\left\{-1 \mp \sqrt{5} \pm \sqrt{-10 \pm 2\sqrt{5}}\right\}$$

ossia

$$\varepsilon = \frac{1}{4}\left\{-1 \mp \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 \mp 2\sqrt{5}}\right\}.$$

Le 4 radici ε dell' equazione binomia sono date da questa formula ove si attribuiscano ai radicali i segni $+$ e $-$. Si può riconoscere geometricamente (in modo molto facile) che la radice

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i\ \mathrm{sen}\ \frac{2\pi}{5}$$

viene data assumendo tutti i radicali positivamente, cioè ponendo

$$\varepsilon = \frac{1}{4}\left\{-1 + \sqrt{5} + i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right\}.$$

La formula

$$\eta_2 = 2\cos\frac{2\pi}{5} = -\left(\frac{1}{2} + \sqrt{5}\right)$$

dà una semplicissima costruzione del pentagono regolare.

§ 10. **Poligoni regolari con un numero di lati composto.** — Diciamo ora qualche cosa intorno alla costruibilità dei poligoni regolari di n lati, dove n è un

numero composto. Anzitutto osserviamo che se n si decompone nel prodotto di due numeri interi p, q:

$$n = pq\,,$$

dato lo $n$gono regolare si costruiranno subito il $p$gono e il $q$gono. Infatti dato l'arco di cerchio $\frac{2\pi}{n}$ (la cui corda è il lato dello $n$gono), o, se si vuole, dato il relativo angolo al centro, basterà moltiplicarlo per q per ottenere l'arco o angolo

$$\frac{2\pi q}{n} = \frac{2\pi}{p}\,.$$

da cui dipende la costruzione del $p$gono.

Pongasi ora che n sia scomposto nei suoi fattori primi $p_1, p_2, \ldots p_r$:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}\,.$$

Affinchè la costruzione dello $n$gono sia possibile, dovrà esser possibile la costruzione dei poligoni regolari di $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$ lati.

La costruzione del poligono regolare di p^α lati, ($\alpha > 1$), dipende dalla risoluzione dell' equazione binomia

$$z^{p^\alpha} = 1\,,$$

la quale (come è chiaro anche geometricamente) ammette tutte le radici dell'equazione

$$z^{p^{\alpha-1}} = 1\,.$$

L' equazione

$$\frac{z^{p^\alpha} - 1}{z^{p^{\alpha-1}} - 1} = o$$

è irriducibile.

Questo teorema si dimostra collo stesso ragionamento di Eisenstein che ha servito pel caso $\alpha = 1$ (§ 5).

Da esso discende la conseguenza che l' equazione anzidetta sarà risolubile per radicali quadratici, solo

quando il suo grado $p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^{\alpha-1}(p-1)$ sia una potenza del 2. Ma il numero $p^{\alpha-1}$ ove $\alpha > 1$, non può essere una potenza del 2 se non è $p = 2$.

Di quì si deduce che non vi è alcun poligono regolare costruibile di p^α lati, ove

$$\alpha > 1, \quad p > 2.$$

Dunque se lo ngono regolare è costruibile, il numero

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r},$$

deve contenere, all' infuori di una certa potenza del 2, tutti fattori primi differenti (elevati alla potenza 1), e questi fattori p debbono essere ciascuno della forma $2^{2^\nu} + 1$, giacchè il poligono regolare di p lati deve risultare costruibile (§ 8); insomma il numero n deve essere della forma

$$n = 2^\nu \left(2^{2^{\nu_1}} + 1\right)\left(2^{2^{\nu_2}} + 1\right) \dots \left(2^{2^{\nu_s}} + 1\right),$$

ove $\nu_1, \nu_2 \dots \nu_s$ sono tutti differenti fra loro, e

$$p_1 = 2^{2^{\nu_1}} + 1, \quad p_2 = 2^{2^{\nu_2}} + 1 \dots$$

sono numeri primi.

Dimostriamo infine che quando n è un numero della forma indicata, la costruzione dello ngono regolare è effettuabile.

A tal fine basta far vedere come « dati i poligoni regolari di r, s lati, ove r, s sono numeri primi fra loro, si possa costruire il poligono regolare di $n = rs$ lati ».

Supponendo dati i poligoni regolari di r, s lati, sono dati gli angoli al centro corrispondenti

$$a = \frac{2\pi}{r}, \quad b = \frac{2\pi}{s}.$$

Ora, essendo r e s primi fra loro, si può risolvere l' equazione d' analisi indeterminata

$$sx - ry = 1,$$

determinando due numeri interi x, y che vi soddisfino; allora si avrà

$$ax - by = 2\pi \left(\frac{x}{r} - \frac{y}{s}\right) = \frac{2\pi}{rs} = \frac{2\pi}{n}$$

e perciò si otterrà la costruzione dell' angolo al centro dello ngono (e quindi la costruzione dello ngono stesso) facendo la differenza tra gli angoli ax e by.

Come esempio consideriamo il caso del pentadecagono regolare ($n = 15$), la cui costruzione si può dedurre da quelle del triangolo equilatero e del pentagono regolare. Risolviamo l' equazione d' analisi indeterminata

$$3x - 5y = 1,$$

ponendo

$$x = z \qquad y = 1.$$

L' angolo al centro del pentadecagono si costruisce quindi facendo la differenza fra il doppio dell' angolo al centro del pentagono e l' angolo al centro del triangolo equilatero:

$$\frac{2\pi}{15} = 2 \cdot \frac{2\pi}{5} - \frac{2\pi}{3}.$$

Questa costruzione non differisce sostanzialmente da quella di Euclide ove si biseca l' angolo

$$\frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{5} = \frac{4\pi}{15}.$$

Riassumendo infine i resultati ottenuti, possiamo enunciare il teorema:

Gli ngoni regolari costruibili colla riga e col compasso sono, tutti e soli, quelli per i quali il numero n decomposto in fattori primi, è della forma

$$n = 2^{\nu} \cdot \left(2^{2^{\nu_1}} + 1\right) \cdot \left(2^{2^{\nu_2}} + 1\right) \ldots \left(2^{2^{\nu_s}} + 1\right),$$

ove $\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_s$ *sono differenti fra loro.*

§ 11. **Osservazioni sulla determinazione dei poligoni regolari che non sono costruibili elementarmente.** — Termineremo questo articolo con alcune osservazioni relative alla determinazione dei poligoni regolari che non sono costruibili colla riga e col compasso. E riferendoci al più semplice caso di un poligono regolare di p lati, ove p è un numero primo, spiegheremo sopra un esempio che cosa c' insegni a tale proposito il metodo di Gauss per la risoluzione dell' equazione binomia:

$$z^p = 1.$$

Prendiamo dunque $p = 7$, e consideriamo le radici dell' equazione $z^7 = 1$ (tolta la $z = 1$):

$$\varepsilon\,,\ \varepsilon^2\,,\ \varepsilon^3\,,\ \varepsilon^4\,,\ \varepsilon^5\,,\ \varepsilon^6\,,$$

ove

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi r}{7} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi r}{7}\,.$$

Scegliamo una radice primitiva del modulo 7, e sia $g = 3$; essa ci permette di ordinare le ε nel modo seguente:

$$\varepsilon^3\,,\ \varepsilon^{3^2} = \varepsilon^2\,,\ \varepsilon^{3^3} = \varepsilon^6\,,\ \varepsilon^{3^4} = \varepsilon^4\,,\ \varepsilon^{3^5} = \varepsilon^5\,,\ \varepsilon^{3^6} = \varepsilon.$$

Formiamo i periodi di 3 termini

$$\eta_1 = \varepsilon^3 + \varepsilon^{3^3} + \varepsilon^{3^5} = \varepsilon^3 + \varepsilon^6 + \varepsilon^5$$

$$\eta_2 = \varepsilon^{3^2} + \varepsilon^{3^4} + \varepsilon^{3^6} = \varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \varepsilon\,;$$

abbiamo

$$\eta_1 + \eta_2 = \eta = -1 \quad (\eta = \Sigma\varepsilon)$$

$$\eta_1\,\eta_2 = (\varepsilon^3 + \varepsilon^6 + \varepsilon^5)\,(\varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \varepsilon) = \varepsilon^5 + \varepsilon^7 + \varepsilon^4 + \varepsilon^8 + \\ + \varepsilon^{10} + \varepsilon^7 + \varepsilon^7 + \varepsilon^9 + \varepsilon^6 = \eta + 3 = 2\,,$$

e quindi η_1, η_2 soddisfano all' equazione di 2.° grado

$$x^2 + x + 2 = o.$$

Una volta calcolati η_1, η_2, la determinazione delle radici ε viene a dipendere da un' equazione di 3.° grado; infatti si ha p. e.

$$\varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \varepsilon = \eta_2$$
$$\varepsilon^2 . \varepsilon^4 + \varepsilon^2 . \varepsilon + \varepsilon^4 . \varepsilon = \eta_1$$
$$\varepsilon^2 . \varepsilon^4 . \varepsilon = 1 ,$$

e quindi ε^2, ε^4, ε sono radici dell' equazione

$$x^3 - \eta_2 x^2 + \eta_1 x - 1 = o .$$

Dalla effettuata riduzione dipende la *possibilità di ricondurre la costruzione dell' ettagono regolare alla trisezione d' un angolo* (cfr. art. 13).

Il problema generale dell' equazione binomia $z^p = 1$, ove p è un numero primo qualunque, ammette sempre una riduzione (come per $p = 7$), potendosi ricondurre alla risoluzione di una serie di equazioni di grado inferiore: se $p - 1$, decomposto in fattori primi, è della forma

$$p - 1 = 2^{\alpha_1} . 3^{\alpha_2} . 5^{\alpha_3} \ldots ,$$

si dovranno risolvere precisamente

α_1 equazioni sucessive di 2.° grado,
α_2 equazioni del 3.°,
α_3 equazioni del 5.° ecc.

Una tale riduzione è portata dal metodo di Gauss che conduce a formare successivamente periodi di

$$\frac{p-1}{2}, \frac{p-1}{4}, \ldots \frac{p-1}{2^{\alpha_1}}$$

termini, quindi periodi di

$$\frac{p-1}{2^{\alpha_1} . 3} \ldots \frac{p-1}{2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2}}$$

termini, periodi di

$$\frac{p-1}{2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} . 5} \cdots \frac{p-1}{2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3}}$$

termini ecc. [1].

Dal punto di vista geometrico c' interessano i primi casi, in cui $p - 1$ ha soltanto fattori primi uguali a 2 e a 3, potendosi allora assegnare delle semplici costruzioni del $p$gono, ricorrendo ad un *trisettore degli angoli* o ad una *parabola fissa,* mezzi che in unione alla riga ed al compasso permettono di risolvere tutti i problemi di 3° grado (cfr: art. 13).

Quì ci limiteremo a citare i seguenti lavori che trattano i casi più semplici: Per $p = 7, 13, 97$ si può vedere: Pascal, *Giornale di Matematiche di Battaglini*, vol. XXV; per $p = 19, 37$: I. Amaldi, *ibidem* vol. XXX.

---

[1] Cfr. Bachmann *l. c.*, Bianchi *l. c.*, ove sono pure date le formule per la risoluzione effettiva.

ARTICOLO DODICESIMO

« **Sulle costruzioni dell' ettadecagono regolare** » di Ermenegildo Daniele a Torino.

La questione della costruzione dei poligoni regolari, o, che fa lo stesso, della divisione della circonferenza in parti eguali, fu trattata in modo generale nell' art. 11: ivi si pervenne a stabilire in via teorica il criterio per giudicare se il problema algebrico della divisione della circonferenza in un dato numero di parti eguali si possa ricondurre alla risoluzione di equazioni di 2.° grado, e quindi (v. art. 10) le costruzioni grafiche relative non richiedano l' uso di altri strumenti all' infuori della riga e del compasso. Lo scopo di questo articolo è di far vedere sopra un caso particolare come si specializzi la teoria generale ivi esposta, come si scrivano, cioè, le equazioni di 2.° grado da cui il problema dipende; e poi come si possa eseguire praticamente l' effettiva costruzione delle loro radici. Il poligono che noi sceglieremo come esempio sarà quello di 17 lati, alla cui costruibilità con riga e compasso già si accennò esplicitamente all' art. 11; è il poligono più semplice, dopo quelli studiati dagli antichi

geometri, il quale si possa costruire con mezzi elementari, e noi esporremo alcune delle costruzioni conosciute, fra quelle che ci paiono più caratteristiche.

I

§ 1. **Risoluzione dell' equazione binomia** $z^{17} = 1$. — L' equazione, da cui dipende la divisione della circonferenza in 17 parti eguali, è del 16° grado; essa è

$$\frac{z^{17} - 1}{z - 1} = o,$$

ossia

$$z^{16} + z^{15} + \ldots + z^2 + z + 1 = o. \qquad (1)$$

Riferendo il cerchio di raggio unità a due suoi diametri ortogonali come assi Cartesiani, le radici di questa equazione avranno per imagini sulla circonferenza 16 punti, i quali, unitamente al punto $z = 1$, costituiscono i vertici del 17-gono regolare inscritto. Posto

$$\varepsilon = \cos \frac{2k\pi}{17} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{17},$$

le radici della (1) si possono rappresentare mediante la formola

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{17} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{17}, \quad (k = 1, 2, \ldots, 16).$$

Secondo il procedimento generale dobbiamo cominciare col fare la scelta di una *radice primitiva del modulo 17*; ora il minimo numero r per cui risulta 3^r divisibile per 17 è, come si verifica facilmente, $r = 16$; il numero 3 è dunque una radice primitiva per il modulo 17, anzi

è la più piccola, come si può riconoscere. Ordineremo allora le radici della (1) nel modo seguente:

$$\varepsilon,\ \varepsilon^3,\ \varepsilon^{3^2},\ \varepsilon^{3^3},\ \ldots,\ \varepsilon^{3^{15}},$$

ossia, poichè è $\varepsilon^{17} = 1$,

$$\varepsilon^1,\ \varepsilon^3,\ \varepsilon^9,\ \varepsilon^{10},\ \varepsilon^{13},\ \varepsilon^5,\ \varepsilon^{15},\ \varepsilon^{11},\ \varepsilon^{16},\ \varepsilon^{14},\ \varepsilon^8,\ \varepsilon^7,\ \varepsilon^4,\ \varepsilon^{12},\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^6.$$

Nella seguente tabella scriveremo poscia i periodi di Gauss a 8, a 4 e a 2 termini:

$$\left.\begin{array}{ll}
\eta = \varepsilon^3 + \varepsilon^{10} + \varepsilon^5 + \varepsilon^{11} + \varepsilon^{14} + \varepsilon^7 + \varepsilon^{12} + \varepsilon^6, & \\
\eta_2 = \varepsilon^1 + \varepsilon^9 + \varepsilon^{13} + \varepsilon^{15} + \varepsilon^{16} + \varepsilon^8 + \varepsilon^4 + \varepsilon^2; & \\
\eta_{11} = \varepsilon^3 + \varepsilon^5 + \varepsilon^{14} + \varepsilon^{12}, & \eta_{12} = \varepsilon^{10} + \varepsilon^{11} + \varepsilon^7 + \varepsilon^6, \\
\eta_{21} = \varepsilon^1 + \varepsilon^{13} + \varepsilon^{16} + \varepsilon^4, & \eta_{22} = \varepsilon^9 + \varepsilon^{15} + \varepsilon^8 + \varepsilon^2; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\eta_{211} = \varepsilon^1 + \varepsilon^{16}, & \eta_{212} = \varepsilon^{13} + \varepsilon^4, \ldots\ldots
\end{array}\right\} (A)$$

La risoluzione algebrica del problema si potrà dire ottenuta quando si siano calcolati i periodi a due termini. Difatti le ε sono due a due immaginarie coniugate, per modo che si ha

$$\varepsilon^k + \varepsilon^{17-k} = 2 \cos \frac{2k\pi}{17},$$

e questi sono appunto i periodi a due termini; ciascuno di essi adunque ci fornisce due angoli a cui corrispondono due vertici del 17-gono simmetrici rispetto all'asse x. Anche la parte geometrica del problema sarà risolta quando si sia riusciti a *costruire* i periodi a due termini, poichè allora tutto si ridurrà a segnare un arco di cui è noto il coseno. Il calcolo delle η con tre indici si compie risolvendo una dopo l'altra una successione di equazioni di 2° grado che ora andremo a trovare, e che nascono da certe relazioni intercedenti fra i varii periodi della tabella *(A)*.

Se si tien conto delle espressioni di η_1 e η_2 in funzione delle ε, e si ricorda che le ε sono le radici della (1), si ottiene:

$$\eta_1 + \eta_2 = \varepsilon^1 + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{15} + \varepsilon^{16} = -1,$$
$$\eta_1 \eta_2 = 4(\varepsilon^1 + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{16}) = -4;$$

dunque η_1 e η_2 sono le radici dell' equazione di 2.° grado

$$\eta^2 + \eta - 4 = o. \tag{2}$$

Si ha pure:

$$\eta_{11} + \eta_{12} = \eta_1, \qquad \eta_{11} \eta_{12} = -1,$$

e similmente

$$\eta_{21} + \eta_{22} = \eta_2, \qquad \eta_{21} \eta_{22} = -1;$$

quindi si avranno η_{11} e η_{12} come radici dell' equazione

$$\eta^2 - \eta_1 \eta - 1 = o, \tag{3}$$

mentre η_{21} e η_{22} saranno le radici della

$$\eta^2 - \eta_2 \eta - 1 = o. \tag{4}$$

Finalmente notiamo le relazioni

$$\eta_{211} + \eta_{212} = \eta_{21}, \qquad \eta_{211} \eta_{212} = \eta_{11},$$

le quali mostrano che η_{211} e η_{212} sono le radici della equazione

$$\eta^2 - \eta_{21} \eta + \eta_{11} = o. \tag{5}$$

Le (2), (3), (4), (5) sono le equazioni di 2.° grado a cui si voleva giungere. Risolvendo la (2) noi conosceremo i coefficienti delle (3) e (4); le radici di queste ci daranno i coefficienti della (5), la quale poi ammette per radici due fra i periodi a due termini. Siccome uno di questi è η_{211}, ed i punti da esso forniti costituiscono, insieme col punto $z = 1$, tre vertici consecutivi del 17-gono, così colla conoscenza di η_{211} il problema si può ritenere completamente risolto. In sostanza la risoluzione di

quattro equazioni di 2.° grado è sufficiente per la soluzione del nostro problema; e si può ancora aggiungere che, delle otto radici che si vengono ad ottenere, solo cinque hanno per noi interesse, e sono queste η_1, η_2, η_{11}, η_{21}, η_{211}: l' ultima è il vero scopo della nostra ricerca, mentre le prime quattro servono alla sua determinazione.

Prima che la parte algebrica della questione si possa dire esaurita, occorre dare un criterio per distinguere l' una dall' altra le due radici di ciascuna delle quattro equazioni di 2.° grado; non è difatti indifferente scegliere l' una piuttosto che l' altra, poichè ogni radice ricevette già, nella tabella *(A)*, un'espressione determinata mediante una ε particolare. Poniamo perciò per brevità:

$$\varepsilon^k + \varepsilon^{17-k} = 2 \cos \frac{2k\pi}{17} = c_k ,$$

onde sarà $c_k = c_{17-k}$; allora possiamo scrivere:

$$\eta_1 = c_3 + c_5 + c_6 + c_7 , \quad \eta_2 = c_1 + c_2 + c_4 + c_8 ;$$
$$\eta_{11} = c_3 + c_5 , \quad \eta_{12} = c_6 + c_7 , \quad \eta_{21} = c_1 + c_4 , \quad \eta_{22} = c_2 + c_8 ;$$
$$\eta_{211} = c_1 , \quad \eta_{212} = c_4 .$$

Osserviamo ora che, le c_k essendo quantità reali, sono pure reali tutte le η; si potrà quindi paragonare fra di loro le grandezze di queste, il che noi faremo nel modo seguente. Si immagini (Fig. 1 - Tav.) la semicirconferenza di raggio 1 divisa in 17 parti eguali mediante i punti $R_o\, R_1\, R_2 \ldots R_{17}$, e si chiamino $s_1\, s_2 \ldots$ le distanze $R_o\, R_1$, $R_o\, R_2, \ldots$; dal triangolo $R_o\, R_k\, R_{17}$ si ha, notando che è $R_o\, R_{17} = s_{17} = 2$,

$$s_k = 2 \operatorname{sen} \frac{k\pi}{17} , \qquad (k = 1, 2, \ldots, 17)$$

e siccome è

$$\cos \frac{2k\pi}{17} = \operatorname{sen} \frac{(17 - 4k)\pi}{34} ,$$

si verificheranno facilmente le eguaglianze:

$$c_1 = s_{13}\,, \quad c_2 = s_9\,, \quad c_3 = s_5\,, \quad c_4 = s_1\,,$$
$$c_5 = -s_3\,, \quad c_6 = -s_7\,, \quad c_7 = -s_{11}\,, \quad c_8 = -s_{15}\,;$$

si potrà dunque esprimere le η mediante le s_k, cioè:

$$\left.\begin{array}{c} \eta_1 = s_5 - s_3 - s_7 - s_{11}\,, \quad \eta_2 = s_1 + s_9 + s_{13} - s_{15}\,; \\ \eta_{11} = s_5 - s_3\,, \ \eta_{12} = -s_7 - s_{11}\,, \ \eta_{21} = s_{13} + s_1\,, \ \eta_{22} = s_9 - s_{15}\,; \\ \eta_{211} = s_{13}\,, \quad \eta_{212} = s_1\,. \end{array}\right\} (6)$$

Basterà ora notare che le s_k crescono col crescere dell' indice k, perchè risultino senz' altro le diseguaglianze seguenti:

$$\eta_{211} > \eta_{212}\,; \quad \eta_{11} > o\,, \quad \eta_{12} < o\,, \quad \eta_{21} > o\,, \ \eta_{22} < o\,; \qquad (7)$$

tenendo conto poi che dev' essere $\eta_1 \eta_2 = -1$, segue inoltre

$$\eta_1 < o\,, \quad \eta_2 > o. \qquad (8)$$

Adesso non vi ha più dubbio sulla designazione delle radici delle nostre quattro equazioni di 2.° grado, sicchè potremo scriverle, senza più, nel prospetto qui appresso, ove porremo, per maggior semplicità, $\eta_{211} = \zeta_1$, $\eta_{212} = \zeta_2$

$$\left.\begin{array}{ll} \eta_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{17}}{2}\,, & \eta_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{17}}{2}\,, \\[2ex] \eta_{11} = \dfrac{\eta_1 + \sqrt{\eta_1^2 + 4}}{2}\,, & \eta_{12} = \dfrac{\eta_1 - \sqrt{\eta_1^2 + 4}}{2}\,, \\[2ex] \eta_{21} = \dfrac{\eta_2 + \sqrt{\eta_2^2 + 4}}{2}\,, & \eta_{22} = \dfrac{\eta_2 - \sqrt{\eta_2^2 + 4}}{2}\,, \\[2ex] \zeta_1 = \dfrac{\eta_{21} + \sqrt{\eta_{21}^2 - 4\eta_{11}}}{2}\,, & \zeta_2 = \dfrac{\eta_{21} - \sqrt{\eta_{21}^2 - 4\eta_{11}}}{2}\,. \end{array}\right\} (B)$$

II.

Non si conosce, fino ad ora, una costruzione del 17-gono regolare ottenuta con pure considerazioni geometriche; gli autori delle diverse costruzioni si ridussero tutti a rappresentare geometricamente le radici delle equazioni di 2.° grado che risolvono algebricamente la questione [1]. Per dare un'idea della varietà dei mezzi con cui si può trattare il problema geometrico che ci occupa, ne esporremo tre soluzioni, ben differenti tra di loro, che rispondono, ciascuna, ad un metodo speciale di risoluzione dei problemi elementari. La prima appartiene al tipo delle costruzioni di Euclide, si compie, cioè, coll'uso della riga e del compasso: essa è, in fondo, dovuta a J. Serret, che la espone nel 2.° vol. della sua « *Algèbre supérieure* », ma nella forma, sotto cui noi la presentiamo, è all'incirca quale si trova nel libro di Bachmann: « *Die Lehre von der Kreistheilung* »; giova notare che in essa l'unico concetto uscente alquanto dal campo della geometria schiettamente elementare è quello di attribuire un segno ai segmenti di una stessa retta. La seconda soluzione è quella classica di Staudt contenuta nel vol. 24.° del *Giornale di Crelle* (1842), e condotta secondo i concetti di Poncelet e Steiner, vale a dire non valendosi che della riga e di un cerchio fisso nel piano della figura; Staudt pubblicò la sua costruzione senza farla seguire neppur da un cenno di dimostrazione: soltanto parecchi anni dopo (1872) la costruzione di Staudt fu spiegata da Schröter nel volume 75.°

---

[1] Per quel che riguarda la costruibilità delle espressioni irrazionali cfr. l'art. 10.

dello stesso *Giornale di Crelle.* La dimostrazione di Schröter si trova riprodotta quasi letteralmente nel libro poco fa citato di Bachmann, come pure nelle *Ausgewählte Fragen der Elementargeometrie* di Klein, il quale la presenta, in alcuni punti, sotto forma più elegante. Di queste modificazioni noi terremo conto nella nostra esposizione. Infine, quasi per contrapposto della precedente, indicheremo una costruzione del 17-gono regolare eseguita col solo compasso, secondo il metodo di L. Mascheroni di cui si diede un' idea nell' art. 8; tale costruzione, dovuta al sig. Gérard, è affatto recente, essendo stata pubblicata solo nel 1897 nel vol. 48.° dei *Math. Annalen,* e risponde in certo modo alla nota seguente che il Klein scriveva a piè della pag. 27 delle *Ausgewählte Fragen:* « Eine Construction des 17-Ecks nach Mascheroni nur » mit Zirkel ist noch nicht versucht, obgleich sie jeden- » falls möglich ist ».

§ 2. **Costruzione di J. Serret, modificata da Bachmann.** — Su una retta qualunque x (Fig. 2 - Tav.) prendiamo ad arbitrio un punto O, dal quale converremo di contare i segmenti positivamente in un senso scelto a piacer nostro. Per O conduciamo la perpendicolare ad x, e su di essa prendiamo un punto A tale che sia $OA = 1$, supposto che il 17-gono si voglia inscrivere in una circonferenza di raggio 1. Sulla x costruiamo poi il segmento

$$OB = -\frac{1}{4},$$

e descriviamo la circonf. $B(BA)$: questa taglierà x in due punti C e C', e dalle costruzioni fatte si avrà, in valore assoluto:

$$BA = BC = BC' = \frac{\sqrt{17}}{4}$$

e, col dovuto segno:

$$OC = OB + BC = \frac{-1-\sqrt{17}}{4},$$

$$OC' = OB + BC' = \frac{-1+\sqrt{17}}{4},$$

ovvero, osservando la tab. (B):

$$OC = \frac{\eta_1}{2}, \quad OC' = \frac{\eta_2}{2}.$$

Così si sono costruite le radici della (2).

Inoltre la circonf. $C(CA)$ taglia x, dalla parte positiva, in un punto D per cui si ha

$$OD = OC + CD = OC + \sqrt{\overline{OC}^2 + \overline{OA}^2} =$$

$$= \frac{\eta_1}{2} + \sqrt{\frac{\eta_1^2}{4} + 1},$$

ossia, per la tab. (B):

$$OD = \eta_{11}.$$

Analogamente la circonf. $C'(C'A)$ taglia x, dalla parte positiva, in un punto D' tale che è

$$OD' = OC' + C'D' = \frac{\eta_2}{2} + \sqrt{\frac{\eta_2^2}{4} + 1} = \eta_{21}$$

Portiamo poscia su x il segmento $OF = -1$, su DF come diametro descriviamo una semicirconferenza, e diciamo G il suo punto d' incontro colla retta OA. Sia H uno dei punti d' incontro di x colla circonferenza

$$G\left(\frac{1}{2}\ OD'\right),$$

e si chiamino K, K' i punti comuni a x e ad $H(HG)$; si ha dalla figura:

$$-OK + OK' = KK' = 2 \,.\, HG = OD' = \eta_{21},$$
$$-OK \,.\, OK' = \overline{OG}^2 = -OF \,.\, OD = \eta_{11}\,.$$

Dunque $-OK$ e OK' sono le radici della (5), e sono entrambe positive, come dev' essere secondo le (6); posto che sia: $-OK > OK'$, sarà, per le diseguaglianze (7):

$$-OK = \zeta_1, \quad OK' = \zeta_2.$$

Se ora si divide OK per metà, si ha il segmento che rappresenta $\cos \frac{2\pi}{17}$, e di qui si può avere senz' altro la corda dell' arco $\frac{2\pi}{17}$, la quale sarà il lato del 17-gono regolare inscritto nel cerchio di raggio OA.

Oppure: se in luogo di OK si prende OK', si ha dalle (6): $OK' = s_1$, cioè OK' rappresenta il lato del 34-gono regolare inscritto; segnati tre suoi vertici consecutivi, avremo il lato del 17-gono.

§ 3. **Costruzione di Staudt.** — Prima di esporre la costruzione del 17-gono regolare trovata da Staudt faremo vedere come si costruiscono, secondo il metodo di Steiner, le radici di un' equazione qualunque di 2.° grado

$$x^2 - px + q = o\,.$$

Supposto tracciato un cerchio (Fig. 3 - Tav.) il cui raggio assumeremo come unità, si conducano nei punti diametralmente opposti O, A le tangenti x, t, e si riferiscano i punti del piano a due assi cartesiani, di cui l' asse x sia la tangente in O e l' asse y il diametro OA. Dette x_1 e x_2 le radici dell' equazione proposta, si segnino

sull' asse x i punti E_1, E_2 di ascisse x_1, x_2 rispettivamente; si hanno subito le equazioni delle rette AE_1 e AE_2 cioè:

$$2x + x_1(y - 2) = o, \qquad 2x + x_2(y - 2) = o;$$

moltiplicandole membro a membro avremo come equazione complessiva delle due rette:

$$4x^2 + 2(x_1 + x_2)(y - 2)x + x_1x_2(y - 2)^2 = o,$$

ossia

$$4x^2 + 2px(y - 2) + q(y - 2)^2 = o.$$

Se da questa sottraggo l' equazione del cerchio, che è

$$x^2 + y(y - 2) = o,$$

dopo averla moltiplicata per 4, ottengo:

$$2px(y - 2) + q(y - 2)^2 - 4y(y - 2) = o,$$

e questa è l' equazione di una conica passante per i punti d' incontro della circonferenza colle rette AE_1, AE_2. Ora questa conica si spezza nella retta $y - 2 = o$, che non è altro se non la t, e nell' altra retta

$$2px + q(y - 2) - 4y = o,$$

che sarà la congiungente i punti D_1, D_2 in cui la circonferenza taglia ulteriormente le rette AE_1 ed AE_2. Chiamando B e C i punti in cui la D_1D_2 taglia rispettivamente t e x, si avranno le loro ascisse ponendo nell' ultima equazione successivamente $y = 2$ e $y = o$; con ciò si ottiene:

$$AB = \frac{4}{p}, \quad OC = \frac{q}{p}.$$

Di qui si deduce la seguente costruzione delle radici dell' equazione $x^2 - px + q = o$. Ad un cerchio si conducano due tangenti t e x in due punti A ed O diametralmente opposti, e si fissi su di esse un medesimo senso

positivo; si segnino sopra t e x rispettivamente i punti B e C per modo che sia, anche in segno, e assumendo il raggio del cerchio come unità,

$$AB = \frac{4}{p}, \quad OC = \frac{q}{p};$$

condotta poi la retta BC, si proiettino i suoi punti di incontro colla circonferenza da A su x: le distanze da O di quelle proiezioni rappresentano le radici della data equazione. Dall' analisi precedente risulta poi che la retta BC taglia la circonferenza in punti reali ogniqualvolta sono reali le radici. Si vede inoltre che all' infuori dei segmenti AB e OC, tutto il rimanente della costruzione si può in ogni caso eseguire linearmente, supposto dato il cerchio col suo centro.

Noi applicheremo ora questa costruzione per trovare le radici delle equazioni (2), (3), (4), (5).

Quanto alla (2) abbiamo: $p = -1$, $q = -4$; porteremo allora (Fig. 5 - Tav.) sulla tangente x il segmento $OC = 4$, cioè eguale al doppio del diametro (il che si potrebbe fare senza impiegare il compasso): la retta che unisce C col centro del cerchio incontra t nel punto di ascissa -4, sicchè chiamando D_1, D_2 i punti comuni a questa retta e alla circonferenza, le rette AD_1, AD_2 incontrano x in due punti E_1, E_2 le cui ascisse rappresentano le radici η_1, η_2 della (2); se dei punti E_1, E_2 il primo è quello che ha ascissa negativa, sarà per le (8):

$$OE_1 = \eta_1, \quad OE_2 = \eta_2.$$

Per avere le radici della (3) bisogna segnare su t il punto di ascissa $\frac{4}{\eta_1}$, e su x quello di ascissa $-\frac{1}{\eta_1}$. Il primo non è che l' intersezione di t colla retta OD_1; difatti chiamando B quel punto, osservando che l' an-

golo AD_1O è retto, si ha che i triangoli AOB, AOE_1 sono simili, e fra i loro lati passa la relazione

$$AB : AO = AO : OE_1,$$

ossia

$$AB = \frac{\overline{AO}^2}{OE_1} = \frac{4}{\eta_1}.$$

Riguardo al punto di ascissa $-\frac{1}{\eta_1}$ sull' asse x, si osservi che la congiungente il punto di ascissa -4 della t col punto di ascissa 1 della x incontra il diametro OA in un punto L per cui si ha

$$LO : LA = 1 : -4 = -\frac{1}{4};$$

allora la retta BL incontra x in un punto C' tale che è

$$OC' : AB = LO : LA = -\frac{1}{4},$$

quindi

$$OC' = -\frac{AB}{4} = -\frac{1}{\eta_1}.$$

Pertanto la retta che unisce il punto di ascissa $\frac{4}{\eta_1}$ sulla t col punto di ascissa $-\frac{1}{\eta_1}$ sulla x è la stessa BC'; quindi proiettando da A su x i punti comuni alla circonferenza e alla retta BC' si avranno le radici della (3). Noi ci limiteremo a segnare la η_1 (che è quella positiva) rappresentata del segmento OE_{11}.

In modo del tutto analogo, partendo da D_2 invece che da D_1, si trovano le radici della (4): si proietterà dunque D_2 da O su t, ed il nuovo punto lo si congiungerà con L; questa congiungente taglia la circonferenza

in due punti, che, proiettati da A su x, danno le radici cercate. Anche qui noi costruiamo soltanto la radice η_1, rappresentata dal segmento OE_{21}.

Venendo finalmente all' equazione (5), per la quale si ha $p = \eta_{21}$, $q = \eta_{11}$, cominceremo a costruire su t il punto B' di ascissa $\frac{4}{\eta_{21}}$, che si ottiene proiettando da O su t l'ulteriore intersezione della circonferenza colla retta AE_{21}. Si dovrà poi costruire su x il punto di ascissa $\frac{\eta_{11}}{\eta_{21}}$; perciò, chiamando F il punto della t di ascissa $+4$, si tiri FE_{11} e sia G la sua intersezione colla retta OA, allora la GB' incontra x nel punto C'' di ascissa $\frac{\eta_{11}}{\eta_{21}}$. Difatti si ha

$$AF : AB' = OE_{11} : OC'',$$

ossia:

$$4 : \frac{4}{\eta_{21}} = \eta_{11} : OC'';$$

da cui:

$$OC'' = \frac{\eta_{11}}{\eta_{21}}.$$

Le radici ζ_1 e ζ_2 della (5) si avranno dunque proiettando da A su x i punti comuni alla circonferenza ed alla retta $B'C''$. Se Z_1 è il punto che corrisponde alla radice ζ_1, la retta AZ_1 incontra il diametro della circonferenza parallelo a x in un punto la cui ascissa è $\cos \frac{2\pi}{17}$; siano allora P, R i punti comuni alla corda, condotta per questo punto perpendicolarmente a x, e alla circonferenza, e sia Q il punto, di ascissa positiva, in cui la circonferenza stessa è tagliata dal diametro anzidetto: saranno

P, Q, R tre vertici consecutivi del 17-gono regolare inscritto [1].

§ 4. **Costruzione di Gérard.** — Facciamo nella (2) la trasformazione $\eta = 2\xi$, e diciamo ξ_1 e ξ_2 le radici dell' equazione trasformata; introduciamo poi le ξ in luogo delle η nelle formole della tabella *(B)*: esse si muteranno in queste altre:

$$\xi_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}, \qquad \xi_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{4},$$

$$\eta_{11} = \xi_1 + \sqrt{\xi_1^2+1}, \qquad \eta_{21} = \xi_2 + \sqrt{\xi_2^2+1},$$

$$\zeta_1 = \frac{\eta_{21} + \sqrt{\eta_{21}^2 - 4\eta_{11}}}{2},$$

ove abbiamo scritto solo le cinque radici che ci occorrono.

Sia O il centro della circonferenza (Fig. 4. - Tav.) nella quale si vuole inscrivere il 17-gono regolare; su di essa si segnino i punti A, B, C, D vertici di un esagono regolare, indi si costruisca il punto medio M del segmento OA (secondo l' art. 8, § 4.); intanto si determini anche il punto X intersezione delle circonf. $A(AC)$ e $D(AC)$. Essendo $OX = \sqrt{2}$ (art. 8, § 4.), la circonf. $A(OX)$ taglia la data in due punti F, F' tali che il quadrilatero $AFDF'$ è un quadrato. Assumiamo le rette OD e OF risp. come assi x e y, e vediamo di costruire sull' asse x, come s' è fatto nei metodi precedenti, i punti le cui ascisse sono ξ_1, ξ_2, η_{11}, η_{21}, ζ_1. I punti K e K' interse-

---

[1] In una Nota pubblicata nei *Math. Annalen* (VI, 1873) il signor Affolter dimostra che la costruzione di Staudt ora indicata per il 17-gono si può estendere a tutti i poligoni regolari costruibili con riga e compasso, ed espone dettagliatamente le costruzioni che si riferiscono al poligono di 257 lati.

zioni delle circonf. $O(1)$ e $M(1)$, hanno entrambi per ascissa $-\frac{1}{4}$, e per ordinate

$$\pm\sqrt{1-\frac{1}{16}};$$

le $K(OX)$ e $K'(OX)$ si tagliano allora in due punti E_1, E_2 dell' asse x, le cui ascisse sono risp.

$$-\frac{1}{4}-\sqrt{2-\left(1-\frac{1}{16}\right)}=\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$$

e

$$\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$$

cioè sono ξ_1 e ξ_2.

Inoltre la circonf. $E_1(1)$ taglia le $F(\xi_1)$ e $F'(\xi_1)$ nei due punti L_1 e L'_1 aventi la medesima ascissa ξ_1 e per ordinate ± 1, e le circonf.

$$L_1\left(E_1X=\sqrt{\xi_1^2+2}\right) \text{ e } L'_1(E_1X)$$

s' incontrano sull' asse x in un punto E_{11} di ascissa

$$OE_{11}=OE_1+E_1E_{11}$$

$$=OE_1+\sqrt{\overline{L_1E_{11}}^2-\overline{L_1E_1}^2}=\xi_1+\sqrt{\xi_1^2+1}=\eta_{11}.$$

Analogamente la $E_2(1)$ taglia $F(\xi_2)$ e $F'(\xi_2)$ nei due punti L_2 e L'_1 di ascissa ξ_2 e di ordinate ± 1, e le circonferenze $L_2(E_2X)$ e $L'_2(E_2X)$ determinano sull' asse x un punto E_{21} di ascissa η_{21}.

Infine si costruiscano i punti N, N' intersezioni delle $O(AE_{11})$ e $E_{21}(AE_{11})$: essi hanno per ascissa $\frac{1}{2}\eta_{21}$ e per ordinate

$$\pm\sqrt{\overline{ON}^2-\frac{1}{4}\eta_{21}^2}=\pm\sqrt{(\eta_{11}+1)^2-\frac{1}{4}\eta_{21}^2};$$

allora le circonf. $N(E_{1\text{I}}B)$ e $N'(E_{1\text{I}}B)$ determinano sopra l' asse x un punto Z_{I} di ascissa ζ_{I}. Difatti abbiamo:

$$NZ_{\text{I}} = N'Z_{\text{I}} = E_{1\text{I}}B =$$

$$\sqrt{\overline{ME}^2_{1\text{I}} + \overline{MB}^2} = \sqrt{\left(\eta_{1\text{I}} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \sqrt{\eta^2_{1\text{I}} + \eta_{1\text{I}} + 1}\,;$$

quindi

$$OZ_{\text{I}} = \frac{1}{2}\eta_{2\text{I}} + \sqrt{\overline{NZ}^2_{\text{I}} - \left(\frac{NN'}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\eta_{2\text{I}} + \sqrt{\eta_{1\text{I}}{}^2 + \eta_{1\text{I}} + 1 - (\eta_{1\text{I}} + 1)^2 + \frac{1}{4}\eta^2_{2\text{I}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\eta_{2\text{I}} + \sqrt{\frac{1}{4}\eta_{2\text{I}}{}^2 - \eta_{1\text{I}}} = \zeta_{\text{I}}.$$

Ed ora, siccome è

$$\zeta_{\text{I}} = 2\cos\frac{2\pi}{17},$$

non avremo che da tagliare la circonf. $O(1)$ colla $Z_{\text{I}}(1)$ per avere due punti P e P', i quali insieme con D costituiscono tre vertici consecutivi del 17-gono.

ARTICOLO TREDICESIMO

« **Problemi di 3.° grado: Duplicazione del cubo — Trisezione dell' angolo** » di Alberto Conti a Bologna.

Il *problema della duplicazione del cubo* è provenuto a noi dalla più remota antichità ed è noto anche sotto la denominazione di *problema di Delo* a causa di una origine favolosa attribuita al problema stesso. Secondo la tradizione, quattro secoli e mezzo circa avanti l' Era Volgare, una terribile peste era scoppiata nell' isola di Delo; l' oracolo di Delfo, consultato sul da farsi, rispondeva che detta peste era da attribuirsi allo sdegno di Apollo e che per calmare il nume sdegnato, era necessario *raddoppiare* l' altare dedicatogli nell' isola stessa, altare che era di forma cubica: tale, secondo la tradizione, l' origine favolosa del problema della duplicazione del cubo, che attrasse i più eletti ingegni dell' antichità.

Ad Ippocrate di Chio (468-377 av. C.) si attribuisce la riduzione del problema di Delo al seguente: « *dati* » *due segmenti a, b, costruirne altri due x, y che con a, b,* » *considerati come estremi, formino tre rapporti in propor-*

» *zione continua (il primo col secondo ed il secondo col terzo),*
» *cioè tali che si abbia:*

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b} \tag{1}$$

Invero, da questa catena di rapporti uguali deriva:

$$\begin{cases} x^2 = ay \\ x = \dfrac{ab}{y} \end{cases}$$

da cui

$$x^3 = a^2 b,$$

onde se $b = 2a$, ed a è il lato di un dato cubo, avendosi

$$x^3 = 2a^3$$

il segmento x viene ad essere il lato del cubo doppio di quello dato [1].

D' altronde, colla scoperta d' Ippocrate la difficoltà non era cambiata che di forma e non si era raggiunto altro vantaggio che quello di presentare il problema come un problema di geometria piana; invano si facevano tentativi per risolvere, col semplice uso della riga e del compasso, la nuova questione delle *due medie proporzionali*, a cui quella di Delo era stata ricondotta da Ippocrate. Nelle condizioni in cui era posto, il problema era impossibile a risolversi, ma l' evidenza di questa

---

[1] E non è fuor di luogo osservare che col metodo di Ippocrate vengono risolti simultaneamente il problema della duplicazione e quello della quadruplicazione del cubo, attesochè dalla catena di rapporti uguali (1) deriva anche:

$$\begin{cases} y^2 = bx \\ y = \dfrac{ab}{x} \end{cases}$$

donde $y^3 = ab^2$ e perciò per $b = 2a$, $y^3 = 4a^3$; cosicchè y è il lato del cubo quadruplo di quello avente a per spigolo.

Fig. 1

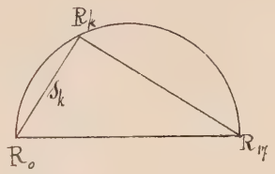


Fig. 2

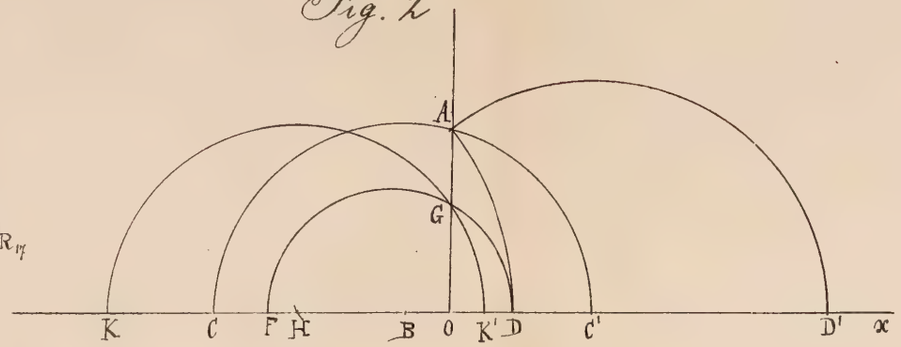


Fig. 3

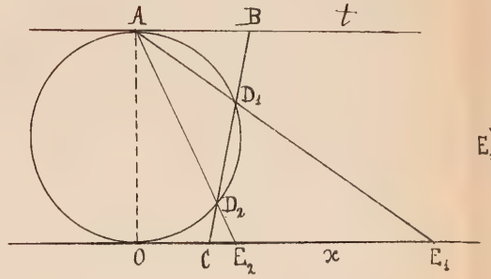


Fig. 4

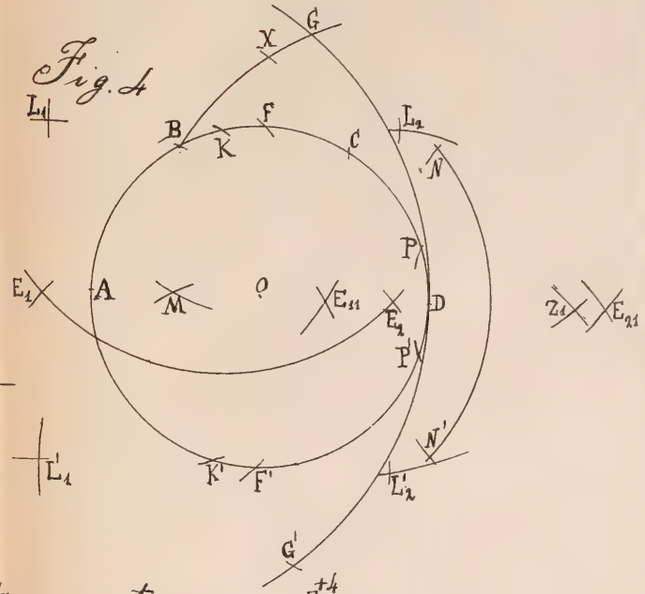


Fig. 5

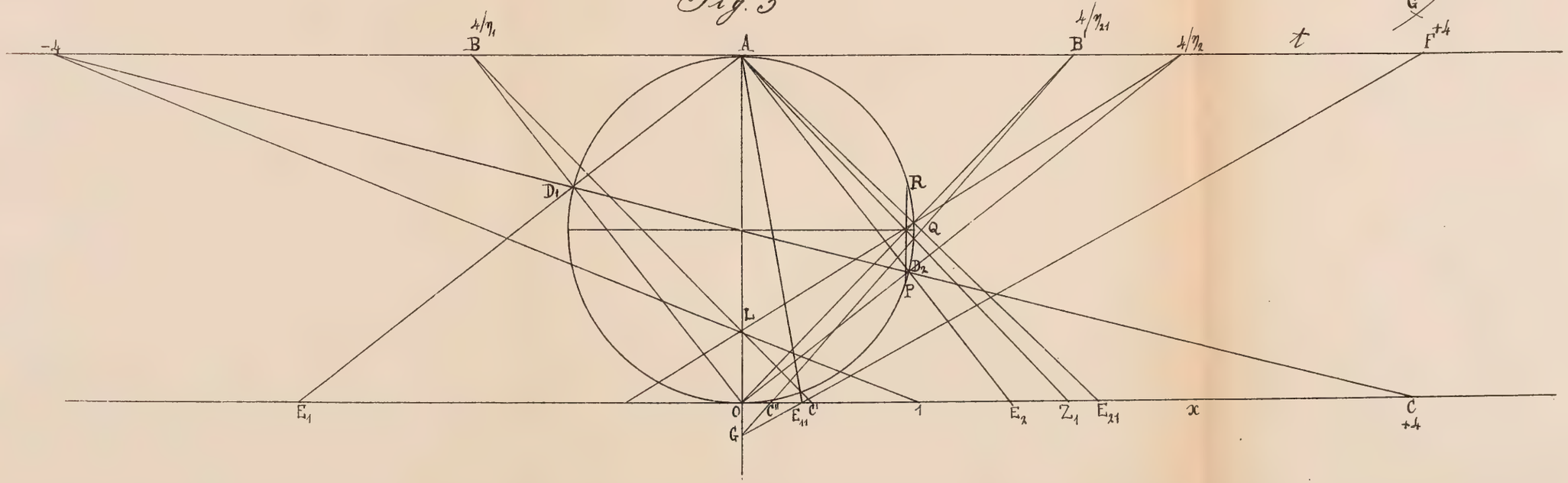


Tavola.

impossibilità dipende da considerazioni d' una natura completamente estranea alle investigazioni dei Greci. È tuttavia presumibile che i Greci stessi sospettassero non esser possibile risolvere il problema di Delo coi soli mezzi della geometria elementare, attesochè i risultati di Platone, Archita, Menecmo, Eratostene, Apollonio, Nicomede, Diocle, dimostrano, come vedremo, che, almeno provvisoriamente, questi geometri dovettero rinunciare alle condizioni che s' erano imposte dapprima, ed escogitare delle soluzioni di quel problema fondate su metodi essenzialmente diversi da quelli da essi medesimi adoperati per la risoluzione degli altri problemi geometrici.

Del *problema della trisezione dell' angolo* non si ha una positiva testimonianza circa la sua antichità, ma *l' ordine dei progressi dello spirito umano non permette di dubitarne* (1); dopo aver diviso l' angolo in due parti uguali, la prima questione che si sarà affacciata alla mente sarà stata la divisione dell' angolo in tre parti uguali, se pure non sia stata addirittura l' altra più generale della divisione dell' angolo in due parti aventi tra loro un dato rapporto.

Anche per questo problema furono fatti innumerevoli tentativi infruttuosi, e, giova riportare le parole del Bossut (2): « quest' accanimento divenne una specie » di malattia epidemica che si è trasmessa di secolo in » secolo sino ai nostri giorni; doveva cessare e cessò infatti » per quelli che seguirono il progresso delle matematiche, » allorchè si incominciò ad applicare l' algebra alla » geometria. Ed oggi il male è incurabile per coloro » che attaccano tali questioni colle armi degli antichi,

---

(1) Cfr. J. F. Montucla: *Histoire des Mathématiques.* — Paris, 1792-1807. Parte I, libro III.

(2) Cfr. Charles Bossut: *Histoire générale des Mathématiques.* — Paris, 1810.

» perchè non essendo essi al corrente delle scienze attuali,
» non esiste altro mezzo per guarirli... »

Tuttavia le ricerche degli antichi, per questo problema come per quello di Delo, sono state assai utili, sia per diversi strumenti ingegnosi inventati per risolvere i detti problemi in modo approssimato e più che sufficiente nella pratica, sia soprattutto per le nuove teorie geometriche di cui esse furono seme fecondo.

Ciò premesso, passiamo a parlare di questi due problemi classici, dimostrando l' impossibilità di risolverli *elementarmente*, ed accennando ai più notevoli metodi adoperati dagli antichi e dai moderni per risolvere questi problemi o mediante le coniche o mediante linee d' ordine superiore al secondo, o con strumenti appositamente costruiti o con metodi grafici d' approssimazione.

Terminiamo con un cenno dei metodi atti a risolvere i problemi più generali del 3.° grado, mostrando come essi si possano ricondurre tutti al particolare problema della trisezione dell' angolo.

I

§ 1. **Impossibilità di risolvere elementarmente il problema della duplicazione del cubo.** — Se l è il lato di un dato cubo e perciò l^3 ne rappresenta il volume, il lato di un altro cubo che sia doppio del precedente, è evidentemente radice dell' equazione cubica binomia

$$x^3 - 2l^3 = o. \qquad (1)$$

Se poi supponiamo, come evidentemente può farsi senza diminuire la generalità delle nostre considerazioni, che il lato del cubo dato sia uguale a 1, l' equazione (1) si trasforma nell' altra

$$x^3 - 2 = o. \qquad (2)$$

Questa equazione è irriducibile.

Tale resultato rientra in un altro più generale.

Sia $a\left(=\frac{m}{n}\right)$ un numero razionale ed $\frac{m}{n}$ sia la frazione irriducibile che lo rappresenta; allora *l' equazione* $x^3 - \frac{m}{n} = o$ *da cui dipende la moltiplicazione del cubo per* $\frac{m}{n}$, *è irriducibile se* m *ed* n *non sono ambedue cubi di numeri interi.*

Infatti se l' equazione suddetta è riducibile, si deve avere identicamente:

$$x^3 - a = (x - b)\ (x^2 + cx + d)$$

ove b, c, d sono numeri razionali. Quindi l' equazione $x^3 - a = o$ ammette la radice razionale $x = b$ e, ponendo b sotto forma di frazione irriducibile $b = \frac{p}{q}$, si ha

$$\frac{p^3}{q^3} = \frac{m}{n}$$

e perciò

$$p^3 = m, \quad q^3 = n \qquad c.\ d.\ d.$$

In particolare l' equazione $x^3 - m = o$ ove m è un numero intero, è irriducibile se m non è cubo di un altro numero intero; quindi sono irriducibili le equazioni

$$x^3 - 2 = o, \quad x^3 - 3 = o, \quad x^3 - 4 = o, \quad x^3 - 5 = o,$$
$$x^3 - 6 = o, \quad x^3 - 7 = o, \quad x^3 - 9 = o, \text{ ecc.}$$

mentre sono riducibili le equazioni

$$x^3 - 8 = o, \quad x^3 - 27 = o, \text{ ecc.},$$

ove 8, 27... sono rispettivi cubi dei numeri interi 2, 3, ...

Ora nella teoria delle equazioni algebriche si dimostra che:

Un' equazione algebrica irriducibile il cui grado non è una potenza di 2, *non è risolubile per radici quadrate* [1].

Dunque *l' equazione della duplicazione del cubo*

$$x^3 - 2 = o$$

non è risolubile per radici quadrate.

Perciò [2] l' espressione che rappresenta una soluzione qualunque dell' equazione $x^3 - 2 = o$ non è costruibile per mezzo di rette e di circoli, ossia *è impossibile di risolvere il problema della duplicazione del cubo col solo uso della retta e del circolo.*

E, più in generale, è impossibile di risolvere col solo uso della retta e del circolo il problema della moltiplicazione del cubo in tutti i casi nei quali il fattore di moltiplicazione non è cubo di un numero razionale, (cioè, in particolare, di un numero della serie naturale, se il fattore di moltiplicazione è un numero intero).

§ 2. **Duplicazione del cubo mediante coniche. - Metodi di Menecmo.** — Considereremo nel seguito il problema della duplicazione del cubo ridotto alla forma equivalente datagli da Ippocrate di problema delle due medie proporzionali.

Al geometra greco Menecmo (tra il 3.° e il 4.° sec. av. C.) devonsi le due seguenti risoluzioni *del problema delle due medie proporzionali :*

1.ª Risoluzione. — Se a, b sono i due segmenti dati, costruiamo una prima parabola MAN (Fig. 1 - Tav. I) di parametro uguale ad a, e una seconda parabola RAS avente lo stesso vertice della prima, il suo asse AY perpendicolare all' asse AX di quella, e di parametro uguale a b. *Le ordinate OP, OQ del punto d' intersezione*

---

(1) Cfr. art. 11.

(2) Cfr. art. 10.

di queste due parabole sono le due medie proporzionali tra i segmenti dati a, b. Infatti, poichè

$$\overline{AP} = \overline{QO} \text{ ed } \overline{AQ} = \overline{PO},$$

abbiamo

$$\overline{OP}^2 = a \,.\, \overline{AP}\,; \quad \text{ed} \quad \overline{AP}^2 = b \,.\, \overline{OP}$$

ossia:

$$\frac{a}{OP} = \frac{OP}{AP} = \frac{AP}{b}$$

cioè:

$$\frac{a}{OP} = \frac{OP}{OQ} = \frac{OQ}{b} \qquad c.d.d.$$

In particolare, se $b = 2a$, il segmento $\overline{OP}$ è il lato del cubo doppio di quello avente a per spigolo, ed il segmento OQ è il lato del cubo quadruplo [1].

2.ª Risoluzione. — Essendo ancora a, b i due segmenti dati, costruiamo una parabola MAN di parametro uguale ad a, e un' iperbole (equilatera), di cui SBT (Fig. 2 - Tav. I) rappresenta un ramo, avente per assintoti l' asse AX della parabola e la sua perpendicolare AY nel vertice, e di una potenza uguale al prodotto ab; (questa iperbole può facilmente costruirsi, poichè presa AR ad arbitrio e costruita la quarta proporzionale AQ in ordine ad AR, a, b, le parallele RP, QP agli assintoti AY, AX individuano un punto P di quest' iperbole; dopo di che può proseguirsi colla nota costruzione per punti, dell' iperbole, dati gli assintoti e un punto). Ciò fatto: *le coordinate BD, BC del punto d' intersezione della parabola e della iperbole sono le due medie proporzionali tra i due segmenti dati a, b.*

---

[1] Cfr. l' introduzione al presente articolo.

Infatti, avendosi:

$$BD^2 = a \,.\, AD\,, \qquad DA \,.\, BD = ab$$

ed essendo $DA = BC$, si ha:

$$\frac{a}{BD} = \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{b} \qquad c.\,d.\,d.$$

In particolare se $b = 2a$, il segmento $\overline{BD}$ è il lato del cubo doppio di quello avente a per spigolo, e $\overline{BC}$ è il lato del cubo quadruplo.

Nell' una o nell' altra delle due precedenti risoluzioni, è fatto uso di due coniche, e precisamente di due parabole nella prima, e d' una parabola e d' un' iperbole nella seconda risoluzione; ma può facilmente vedersi che il problema delle due medie proporzionali può essere più semplicemente risoluto con un cerchio e una parabola.

Descritta infatti la parabola (1) $x^2 = ay$, basta segarla con la circonferenza

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}\,, \qquad (2)$$

che passa pel vertice della parabola e il cui centro è situato nel punto di ascissa $\frac{b}{2}$ e di ordinata $\frac{a}{2}$. Dalla (2), eseguendo i quadrati e riducendo, deriva

$$x^2 + y^2 - bx - ay = o$$

onde, per la (1), ne deduciamo

$$y^2 = bx. \qquad (3)$$

E perciò, per la (1) e la (3),

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

donde resulta che x, y sono le due medie proporzionali fra a, b; e che in particolare se $b = 2a$, il segmento rappresentato da x è il lato del cubo doppio di quello avente a per spigolo.

§ 3. **Duplicazione del cubo mediante la concoide di Nicomede.** — Sono degni di menzione i metodi adoperati da Nicomede e da Diocle per la risoluzione del problema delle due medie proporzionali.

Il geometra Nicomede (250-150 av. C.) inventò una curva di quarto grado, che chiamò *concoide* per la sua somiglianza con una conchiglia. La generazione di questa curva è semplicissima: prendasi una retta AB (Fig. 3 - Tav. I) ed un punto P esterno ad essa (*retta* e *punto* che rispettivamente diconsi *base* e *polo* della concoide); poi, condotta pel polo una retta qualunque r, se ne stacchi al di là della sua intersezione colla base un determinato segmento CD (che dicesi *intervallo* della concoide). Rimanendo fissi la base e il polo, e variando in un modo qualunque la retta r nelle posizioni r', r'', r'''..., ma rimanendo costante l' intervallo via via staccato da questa retta variabile, il luogo geometrico dei punti D, D', D''... è la curva di 4.° grado detta *concoide*. La sua equazione, prendendo per origine il polo (P) e per assi x, y rispettivamente la parallela alla base e la perpendicolare alla base stessa, è precisamente:

$$(x^2 + y^2)(y - a)^2 = y^2 b^2$$

ove a rappresenta la distanza del polo della base e b l' intervallo della concoide.

Nicomede immaginò anche, per rendere più pratica la sua scoperta, lo strumento seguente, che permette di descrivere la concoide con moto continuo:

Abbiasi una riga MN (Fig. 4 - Tav. I) non molto spessa, in mezzo alla quale sia praticata una scanala-

tura AB, e perpendicolarmente alla riga MN in un suo punto (per esempio nel suo punto medio) sia rigidamente congiunta un' altra riga RS sulla quale è infissa una punta P. Sia poi TU un' altra riga mobile con una scanalatura tale che possa penetrarvi la punta P, dal principio alla fine, e senza oscillarvi. All' estremità C di questa scanalatura CE è fissata una seconda punta tale da potere scorrere entro la scanalatura AB della prima riga MN. La riga TU ha poi verso il suo termine un foro D nel quale è situata una matita.

Ciò posto, per descrivere la concoide precedentemente considerata (Fig. 3 - Tav. I), avente AB per base, P per polo e CD per intervallo, si dispone lo strumento precedente in guisa che la scanalatura AB della riga MN si trovi in corrispondenza colla base fissata, e la punta P (che dovrà dunque esser distante dalla scanalatura AB di tanto quanto il polo P è distante dalla base AB) coincida col polo P; allora fatta scorrere la punta C entro la scanalatura AB, è chiaro che la TU ruoterà attorno a P e la matita situata in D disegnerà sulla carta la detta concoide.

Vediamo adesso come mediante la concoide di Nicomede *sia risoluto il problema delle due medie proporzionali.*

Siano AB, AD (Fig. 5 - Tav. I) i segmenti dati, e sia $AD > AB$ e per maggiore semplicità della dimostrazione supponiamo $AB = 2a$, $AD = 2b$. Costruiamo il rettangolo $ABCD$ determinato dai segmenti dati, dividiamo per metà AD e uniamo il suo punto medio E con C; prolunghiamo CE fino ad incontrare in F il prolungamento di AB. Da G, punto medio di AB innalziamo la perpendicolare ad AB e fatto centro in B con raggio uguale a b (metà di AD) tagliamo con un arco di circolo la detta perpendicolare nel punto H, dalla parte di AB da cui non è situato il rettangolo $ABCD$. Uniamo H con F e da B conduciamo la BI parallela ad HF. Descri-

viamo allora (per esempio collo strumento precedentemente descritto) la concoide avente H per polo, BI per base e un intervallo uguale a b. Sia K il punto d'intersezione della concoide descritta col prolungamento di AB, e sia L il punto d'intersezione della CK col prolungamento di AD. *I due segmenti BK, DL, sono le due medie proporzionali cercate.*

Per dimostrarlo, poniamo, per maggiore semplicità,

$$BK = x, \quad DL = y.$$

In conseguenza delle costruzioni fatte,

$$HG = \sqrt{b^2 - a^2}$$
$$GK = a + x$$

e perciò unendo H con H,

$$HK = \sqrt{HG^2 + GK^2} = \sqrt{b^2 - a^2 + (a + x)^2}$$
$$= \sqrt{x^2 + b^2 + 2ax}.$$

Se M è il punto d'intersezione di HK con BI, per la legge di generazione della concoide, evidentemente $MK = b$, e perciò, avendosi, dai triangoli simili BMK, FHK,

$$(\alpha) \qquad \frac{FK}{BK} = \frac{HK}{MK},$$

ed osservando anche che $FK = 4a + x$, abbiamo, sostituendo nella proporzione (α),

$$\frac{4a + x}{x} = \frac{\sqrt{x^2 + b^2 + 2ax}}{b}$$

donde, elevando a quadrato,

$$\frac{16a^2 + x^2 + 8ax}{x^2} = \frac{x^2 + b^2 + 2ax}{b^2}$$

ed eliminando i denominatori

$$16a^2b^2 + b^2x^2 + 8ab^2x = x^4 + b^2x^2 + 2ax^3$$

da cui riducendo e trasportando resulta:

$$x^4 + 2ax^3 - 8ab^2x - 16a^2b^2 = o$$

ossia

$$x^3(x + 2a) - 8ab^2(x + 2a) = o$$

donde

$$(x^3 - 8ab^2)(x + 2a) = o$$

ed essendo $(x + 2a)$ differente da zero, necessariamente

$$x^3 - 8ab^2 = o$$

ossia

$$x^3 = 2a(2b)^2. \qquad (1)$$

Ora, dai triangoli simili LDC, BCK, resulta

$$\frac{2a}{y} = \frac{x}{2b}$$

donde

$$xy = 4ab$$

ed inoltre

$$y = \frac{4ba}{x}$$

e perciò

$$y^3 = \frac{4^3b^3a^3}{x^3};$$

si ha dunque per la (1)

$$y^3 = \frac{4^3b^3a^3}{2^3ab^2} = 8a^2b$$

onde

$$y^3 = (2a)^2 2b. \qquad (2)$$

Dunque abbiamo:

$$\begin{cases} xy = 4ab \\ x^3 = 2a \,.\, (2b)^2 \\ y^3 = (2a)^2 \,.\, 2b \end{cases}$$

La prima e la terza uguaglianza, divise membro a membro, dànno:

$$\frac{y^2}{x} = 2a \text{ ossia } y^2 = 2ax \qquad (3)$$

e la prima e la seconda pure divise membro a membro dànno:

$$\frac{x^2}{y} = 2b \text{ ossia } x^2 = 2by \qquad (4)$$

Dalle quali (3), (4) resulta infine evidentemente:

$$\frac{2a}{y} = \frac{y}{x} = \frac{x}{2b} \qquad c \,.\, d \,.\, d \,.$$

In particolare se $2a = l$, e $2b = 2l$; sarà y il lato del cubo doppio di quello avente l per lato.

Trattando della trisezione dell' angolo (§ 14) vedremo che mediante la concoide di Nicomede può risolversi anche questo problema di terzo grado. Newton in una appendice alla sua *Aritmetica universale* fa molto elogio dell' invenzione di Nicomede che trova di molta utilità per la pratica, oltrechè per la risoluzione dei problemi classici di cui parliamo in questo articolo, anche per la risoluzione di molti altri problemi di terzo grado.

§ 4. **Duplicazione del cubo mediante la cissoide di Diocle.** — Un' altra curva notevole la cui invenzione ebbe origine dal problema delle due medie proporzionali è la *cissoide* che Diocle trovò e adoperò per la risoluzione del problema stesso:

Considerata una circonferenza qualsivoglia di centro O e raggio OA (Fig. 6 - Tav. I) siano AE, MN due suoi

diametri perpendicolari, e B, F due punti del diametro AE equidistanti dal centro O; conduciamo per B e per F, le BC, FG perpendicolari ad AE; il punto D d' intersezione della AG colla BC, al variare della distanza $OB = OF$, descrive la curva detta cissoide. Ora è chiaro che se consideriamo la retta ET tangente in E alla circonferenza data e prolunghiamo AG fino ad incontrare in K questa tangente, se L è il punto d' intersezione di ON e AK, sarà evidentemente

$$KL = LA, \quad GL = LD$$

e perciò anche $KG = DA$. Ed inversamente è ovvio dimostrare che se $KG = DA$ anche $OB = OF$. Onde la cissoide può anche immaginarsi generata conducendo per A (*origine*) una trasversale qualunque e staccando da questa, a partire da A, un segmento uguale alla porzione della trasversale stessa, compresa tra la circonferenza e la sua tangente nel punto diametralmente opposto ad A.

Questa curva è di terzo grado, e prendendo A per origine e per assi x, y rispettivamente il diametro AE e la perpendicolare ad esso, dalla similitudine dei triangoli AEK, ABD, e dei triangoli KEG, ABD, resulta facilmente la sua equazione

$$y^2 = \frac{x^3}{2r - x}$$

ove r indica il raggio della circonferenza data.

Newton poi insegnó come si potesse avere anche della cissoide una facile generazione meccanica per moto continuo [1].

Vediamo adesso come per mezzo della cissoide di Diocle possa risolversi il problema delle due medie proporzionali.

---

[1] Cfr. Montucla, *op. cit.* (Parte I - Libro V, § IX).

Giova perciò premettere una relazione che facilmente si deduce dalla figura cui ci siamo riferiti per spiegare le due generazioni suddette della cissoide (Fig. 6 - Tav. I). Dai triangoli simili ADB, AFG abbiamo

$$\frac{AF}{FG} = \frac{AB}{BD}$$

e dal triangolo rettangolo AEG,

$$\frac{AF}{FG} = \frac{FG}{FE}$$

onde

$$\frac{AF}{FG} = \frac{FG}{FE} = \frac{AB}{BD}$$

e poichè evidentemente:

$$FG = BC, \; FE = AB, \; AF = BE,$$

si ha la catena di rapporti uguali:

$$\frac{EB}{BC} = \frac{BC}{BA} = \frac{BA}{BD} \tag{1}$$

dalla quale apparisce che BC, BA *sono medie proporzionali fra* EB, BD.

Ciò premesso, supponiamo che a, b, siano due segmenti qualunque di cui devonsi costruire le due medie proporzionali. Sia già tracciata la cissoide rispetto a un cerchio qualunque (Fig. 7 - Tav. I); determiniamo (colla nota costruzione indicata nella parte β della figura 7), la quarta proporzionale in ordine ai segmenti dati a, b e al raggio OE, e riportiamo questa quarta proporzionale da O verso Q, sulla retta cui appartiene il raggio OQ, di guisa che si abbia

$$\frac{a}{b} = \frac{EO}{OM} \tag{2}$$

Sia D l' intersezione della EM colla cissoide; avremo dalla similitudine dei triangoli EBD, EOM,

$$\frac{EO}{OM} = \frac{EB}{BD}$$

e quindi, per la (2),

$$\frac{EB}{BD} = \frac{a}{b}$$

ossia

$$\frac{EB}{a} = \frac{BD}{b} \tag{3}$$

Ora è evidente che dalla catena di rapporti uguali (1) stabilita nell' osservazione premessa, si deduce anche la seguente:

$$\frac{a \,.\, EB}{a \,.\, BC} = \frac{BC \,.\, \dfrac{a}{EB}}{AB \,.\, \dfrac{a}{EB}} = \frac{AB \,.\, b}{BD \,.\, b}$$

che può anche scriversi:

$$\frac{a}{a \,.\, \dfrac{BC}{EB}} = \frac{a \,.\, \dfrac{BC}{EB}}{a \,.\, \dfrac{AB}{EB}} = \frac{AB \,.\, \dfrac{b}{BD}}{b} \tag{4}$$

ed essendo per la (3)

$$\frac{b}{BD} = \frac{a}{EB}$$

si ha altresì, sostituendo nella (4)

$$\frac{a}{a \,.\, \dfrac{BC}{EB}} = \frac{a \,.\, \dfrac{BC}{EB}}{a \,.\, \dfrac{AB}{EB}} = \frac{a \,.\, \dfrac{AB}{EB}}{b}$$

Onde le due medie propozionali fra i segmenti dati a, b, sono

$$a \,.\, \frac{BC}{EB} \quad \text{ed} \quad a \,.\, \frac{AB}{EB}$$

ossia i segmenti x, y che rispettivamente rappresentano le quarte proporzionali in ordine ad EB, BC, a ed EB, AB, a, come è indicato dalle parti γ) δ), della figura 7 che colle altre due α), β) rappresentano il complesso delle costruzioni colle quali si risolve il problema delle due medie proporzionali coll' uso della riga, del compasso e della cissoide di Diocle [1].

§ 5. **Metodi meccanici per la risoluzione del problema della duplicazione del cubo. - Metodo di Platone** (429-347 av. C.). — Abbiansi tre regoli MN, PQ, NQ (Fig. 8 - Tav. I) di cui i due primi sono perpendicolari al terzo ed hanno dalla parte interna una scanalatura in guisa che un quarto regolo RS possa scorrervi e così muoversi parallelamente al regolo NQ. Siano allora BC, AB i segmenti di cui è proposto di costruire *le due medie proporzionali* (nella figura abbiamo preso AB doppio di BC per indicare direttamente la risoluzione

---

[1] Per una trattazione più completa di questi metodi di risoluzione del problema della duplicazione del cubo, sarebbero necessarie estese ricerche sulle opere dei geometri posteriori a Descartes. A questo proposito il Loria scrive (cfr. *La storia della matematica come anello di congiunzione fra l' insegnamento secondario e l' insegnamento universitario.* Lettura pronunciata a Torino il 15 settembre 1898. *Periodico di matematica per l' insegnamento secondario.* Anno XIV, fasc. I, II, III. Livorno, Giusti): « Alcuni tentativi da me fatti in questo senso, servendomi soltanto delle opere di Huygens, mi autorizzano a garantire colui che vi si accingesse di non perdere tempo e fatica; e per non domandarvi di credere ad una semplice asserzione, cito un fatto.... La *strofoide* appartiene tanto alla categoria costituita dalle curve risolutrici del problema della trisezione dell' angolo, quanto a quella formata dalle linee capaci di sciogliere quello della moltiplicazione del cubo. Questo fatto interessante è rivelato da un' attenta lettura delle opere di Huygens (cfr. *Oeuvres complètes de C. Huygens* (La Haye 1887) pag. 235-238, e una *Nota* di Gino Loria contenuta nel fascicolo di dicembre 1898 del periodico *Mathésis*) ».

meccanica del problema della duplicazione del cubo con questo metodo di PLATONE). Disponiamo i segmenti dati ad angolo retto e prolunghiamoli al di là del vertice B, ciò fatto disponiamo lo strumento precedentemente descritto in guisa che i punti A, C si trovino rispettivamente sui regoli RS, NQ e contemporaneamente i prolungamenti di AB e BC passino rispettivamente pei vertici D, E degli angoli formati dai regoli NQ, RS col regolo MN. *Saranno allora BD, BE le due medie proporzionali cercate fra CB e BA.* Infatti dai triangoli rettangoli CDE, DEA, per la nota proprietà che l' altezza di un triangolo rettangolo relativa all' ipotenusa è media proporzionale fra i segmenti che essa determina sulla ipotenusa stessa, resulta

$$\frac{CB}{BD} = \frac{BD}{BE}\,; \quad \frac{BD}{BE} = \frac{BE}{BA}$$

onde si ha la catena di rapporti uguali

$$\frac{CB}{BD} = \frac{BD}{BE} = \frac{BE}{BA} \qquad c.\,d.\,d.$$

E se (come nel caso della figura) $BA = 2BC$, sarà precisamente BD il lato del cubo doppio di quello che ha per lato BC; e BE sarà il lato del cubo quadruplo.

Questa soluzione è delle più comode per la pratica.

Una risoluzione meccanica del problema delle due medie proporzionali fu data pure da ERATOSTENE (3° secolo av. C.), il quale inventò a tale scopo uno strumento che fu detto il *mesolabio* (1); ed altre risoluzioni, molto meno

---

(1) Cfr. GINO LORIA: *Il periodo aureo della geometria greca.* Saggio storico. Torino 1890. E per maggiori particolari circa questo strumento e, in genere, circa i metodi adoperati dagli antichi, vedi l' opera di NICOLÒ TARTAGLIA: *General trattato dei numeri et misure* (Primo libro della V parte). Venezia, per Curtio Troiano, 1560.

utili però nella pratica, furono date da ARCHITA [1] e da EUDOSSIO.

§ 6. **Costruzione mediante l' integrafo.** — Recentemente ci è stato fornito un metodo per la risoluzione grafica del problema della duplicazione del cubo, dallo strumento detto *integrafo* o *integratore,* il cui ufficio principale è di tracciare la curva integrale, ossia di dare la rappresentazione grafica dell' integrale di una funzione rappresentàta graficamente (cfr. art. 14).

Questo strumento serve per la risoluzione del problema della duplicazione del cubo, poichè integrando due volte la funzione $y = 6x$ che si può immaginare rappresentata dalla retta di equazione $y = 6x$, si ottiene la funzione e quindi la curva $y = x^3$, e perciò l' ascissa corrispondente all' ordinata uguale a 2 (nell' unità di misura scelta, che è indipendente da quella dello strumento) rappresenterà la $\sqrt[3]{2}$.

§ 7. **Generalità relative alle costruzioni approssimate.** — All' esposizione dei metodi particolari più notevoli per risolvere approssimativamente, col solo uso della riga e del compasso, il problema della duplicazione del cubo, premettiamo alcune considerazioni generali circa un metodo grafico d'approssimazione per la costruzione d'un segmento rappresentato da un numero irrazionale qualunque μ [2].

---

(1) Il MONTUCLA afferma inesattamente che non è rimasta traccia alcuna della risoluzione di Archita; può infatti leggersene una chiara esposizione nelle pregevoli *Lezioni di Algebra Elementare* del Professore GIACOMO BELLACCHI, Parte I, vol. II, pag. 134, Firenze, 1884 (Barbèra). — Recentemente questo metodo è stato riprodotto nel periodico *Il Pitagora* (Anno VI, N. 1-2) e proprio nella forma in cui è stato conservato da Eutocio nel suo commento all'opera *De sphaera et cylindro* di Archimede. Anche il TARTAGLIA (op. cit.) fa parola del metodo di Archita.

(2) Questo metodo dovuto al SYLVESTER si trova esposto dal NOVI: *Algebra Superiors.* Firenze, 1863, pag. 406. — Cfr. anche KLEIN: *Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie.* I. Göttingen, 1896, pag. 17.

È noto che ogni numero irrazionale positivo è rappresentato da una frazione continua illimitata a denominatori interi e positivi; sia dunque:

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots}}}}$$

la frazione continua illimitata, a denominatori interi e positivi, che rappresenta l'irrazionale μ e

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots \frac{p_n}{q_n}, \ldots$$

rappresentino le successive *ridotte*, prima, seconda,... n^{esima},... di questa frazione continua, ossia i valori ottenuti arrestandosi rispettivamente al primo, secondo,... n^{esimo} denominatore. È noto anche che tre ridotte consecutive qualunque sono legate da una relazione del tipo seguente:

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}}.$$

Ciò premesso, prendansi due assi ortogonali Ox, Oy e formisi un reticolo di quadrati aventi per vertici tutti punti di coordinate $x = a$, $y = b$, ove a, b rappresentano due numeri interi positivi qualunque, variabili l'uno e l'altro da 1 a ∞. È chiaro che le ridotte

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots \frac{p_n}{q_n}, \ldots$$

sono rappresentate dalle tangenti trigonometriche degli angoli α_1, α_2, α_3, ... α_n ... che i raggi rettori OM_1, OM_2, ... OM_n, ... condotti ai punti $M_1 \equiv (p_1, q_1)$, $M_2 \equiv (p_2, q_2)$, ... $M_n \equiv (p_n, q_n)$, formano coll'asse Ox.

Ora dalla teoria delle frazioni continue sappiamo che le ridotte sono valori via via più approssimati del numero rappresentato dalla frazione continua, e che precisamente le ridotte di posto pari sono valori via via più approssimati per eccesso, mentre quelle di posto dispari sono via via più approssimati per difetto; onde, posto

$$\operatorname{tang} \alpha = \mu ,$$

possiamo dire che gli angoli α_1, α_3, ... α_{2n-1}, ... vanno successivamente crescendo sempre restando tutti minori di α, e gli angoli α_2, α_4, ... α_{2n} ... vanno successivamente decrescendo sempre restando tutti maggiori di α. Così costruendo le rette OM_1, OM_3, ... OM_{2n-1}, ... e le rette OM_2, OM_4, ... OM_{2n} ... ci si può approssimare quanto vogliamo a quella retta OM che forma con Ox l'angolo α; e corrispondentemente si può determinare colla approssimazione che più ci piace la tangente trigonometrica di α, cioè il segmento rappresentato da μ.

In casi particolari poi può essere conveniente d'adoperare qualche altro metodo speciale indicato dalla natura stessa della questione da trattarsi. Teoricamente sarà sempre preferibile un metodo in cui l'approssimazione dipenda dal numero dei tentativi che si fanno, potendosi in tal caso spingere l'approssimazione ad un grado fortissimo col semplice aumentare del numero dei tentativi stessi. Praticamente poi sarà da preferirsi un metodo che con una determinata costruzione semplice, conduca ad un resultato abbastanza approssimato a quello cercato, sì da commettere un errore minore di quanto è apprezzabile dagli strumenti adoperati e dai nostri sensi.

§ 8. **Risoluzione di Apollonio** (270-186 av. C.). — Siano AC, AB (Fig. 9 - Tav. II) i due segmenti dati, tra cui è proposto di costruire le due medie proporzionali.

Disposti ad angolo retto i segmenti dati, costruiamo il rettangolo $ABDC$ da essi determinato; conduciamo le diagonali di questo rettangolo e, fatto centro nel punto E d'intersezione di queste diagonali, descriviamo una circonferenza, *di raggio tale che la retta determinata dai suoi punti d'intersezione F, G coi prolungamenti di AB ed AC* (al di là degli estremi B, C) *passi pel punto D. I segmenti BF, CG sono le due medie proporzionali cercate.* Infatti conducendo pel punto E i raggi EF, EG e le rette EH, EK parallele rispettivamente ad AC, AB, i punti H, K saranno evidentemente i punti medî di AB, AC, e perciò avremo (Prop. VI del 2.° libro d'Euclide, traduzione di Betti e Brioschi):

$$AF \,.\, BF + HB^2 = FH^2 \tag{1}$$

da cui:

$$AF \,.\, BF + HB^2 + HE^2 = FH^2 + HE^2$$

ossia, pei triangoli rettangoli HBE, FHE,

$$AF \,.\, BF + BE^2 = FE^2. \tag{2}$$

Per ragione di simmetria, si ha anche la relazione

$$AG \,.\, CG + EC^2 = EG^2 \tag{2'}$$

analoga alla (2), e che può evidentemente dedursi, come la (2) dalla (1), dalla relazione analoga alla (1) che, per la stessa proposizione d'Euclide testè richiamata, può stabilirsi riferendosi al lato AC, anzichè al lato AB.

Allora essendo $EF = EG$ si ha dalle (2), (2')

$$AF \,.\, BF + BE^2 = AG \,.\, CG + EC^2$$

ed essendo anche $BE = EC$,

$$AF \,.\, BF = AG \,.\, CG$$

ossia:

$$\frac{AG}{AF} = \frac{BF}{CG}. \tag{3}$$

Dalla similitudine dei triangoli FAG, DCG si ha inoltre:

$$\frac{AG}{AF} = \frac{CG}{CD}; \tag{4}$$

e dei triangoli simili DCG, FBD,

$$\frac{CG}{CD} = \frac{BD}{BF} \tag{5}$$

onde dal confronto delle proporzioni (3), (4), (5), deriva infine:

$$\frac{BD}{BF} = \frac{BF}{CG} = \frac{CG}{CD}$$

o anche:

$$\frac{AC}{BF} = \frac{BF}{CG} = \frac{CG}{AB} \qquad c.d.d.$$

In particolare se $AB = 2(AC)$, è BF il lato del cubo doppio di quello avente AC per spigolo.

Questo procedimento d'Apollonio fornisce un metodo di approssimazione per la risoluzione del nostro problema, inquantochè il raggio EF della circonferenza FMG, la cui corda FG passa pel punto D, non è determinabile con una costruzione mediante la riga e il compasso, ma ci si può bensì approssimare ad esso quanto vogliamo, procedendo di tentativo in tentativo, sempre avvicinando tra loro i limiti, tra cui esso viene via via contenuto.

§ 9. **Metodo del Vargiù.** — Tralasciando di parlare dei metodi d' approssimazione del Mascheroni che sono già stati esposti al lettore nell' articolo 8, passiamo ad occuparci dei più moderni metodi d' approssimazione per la risoluzione del problema della duplicazione del cubo, dei quali meritano speciale menzione quelli del Sac. Giuseppe Vargiù, del Buonafalce e del Boccali.

Il metodo del VARGIÙ [1] può brevemente esporsi così: Se l è il lato del cubo da duplicare e d rappresenta la diagonale di una faccia del cubo, si costruisca la media proporzionale m_1 tra l e d; poi si costruisca la media proporzionale m_2 tra d e la prima media proporzionale trovata m_1; e così si costruisca la media proporzionale m_3 tra la prima e la seconda media proporzionale trovate, cioè tra m_1 ed m_2; e così si prosegua costruendo m_4 media proporzionale tra m_2 ed m_3 etc. etc.: *la settima delle medie proporzionali* così successivamente costruite *rappresenta con molta approssimazione* $\left(\text{con un difetto minore di } \frac{2}{1000}\right)$ *il lato del cubo doppio di quello dato.* Infatti, se per semplicità supponiamo $l = 1$, è di conseguenza $d = 2^{\frac{1}{2}}$ ed abbiamo, per le costruzioni di sopra indicate,

$$\frac{1}{m_1} = \frac{m_1}{2^{\frac{1}{2}}} \text{ donde } m_1 = 2^{\frac{1}{4}};$$

$$\frac{2^{\frac{1}{2}}}{m_2} = \frac{m_2}{m_1} \text{ donde } m_2 = 2^{\frac{1}{4}} \cdot m_1^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{8}};$$

$$\frac{m_1}{m_3} = \frac{m_3}{m_2} \text{ donde } m_3 = m_1^{\frac{1}{2}} \cdot m_2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{16}};$$

$$\frac{m_2}{m_4} = \frac{m_4}{m_3} \text{ donde } m_4 = m_2^{\frac{1}{2}} \cdot m_3^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{11}{32}};$$

$$\frac{m_3}{m_5} = \frac{m_5}{m_4} \text{ donde } m_5 = m_3^{\frac{1}{2}} \cdot m_4^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{21}{64}};$$

$$\frac{m_4}{m_6} = \frac{m_6}{m_5} \text{ donde } m_6 = m_4^{\frac{1}{2}} \cdot m_5^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{43}{128}};$$

$$\frac{m_5}{m_7} = \frac{m_7}{m_6} \text{ donde } m_7 = m_5^{\frac{1}{2}} \cdot m_6^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{85}{256}}.$$

---

[1] Sac. GIUSEPPE IGNAZIO VARGIÙ « *Sulla duplicazione del cubo e sulla moltiplicazione di esso* ». Oristano 1877.

Ora dal calcolo logaritmico resulta

$$2^{\frac{85}{256}} = 1{,}2588133\ldots$$

Sappiamo che la

$$\sqrt[3]{2} = 1{,}2599209\ldots$$

Dunque m_7 rappresenta il lato del cubo doppio di quello avente 1 per lato, con un errore minore di $\frac{2}{1000}$ in difetto.

§ 10. **Metodi del Buonafalce.** — Il Buonafalce [1] si è occupato in tre successivi lavori del problema della duplicazione del cubo, e nel terzo lavoro, che è il più completo, ha dato quattro risoluzioni grafiche approssimate di questo problema. Ci limitiamo ad esporre la prima e la terza delle risoluzioni del Buonafalce, notevoli l' una per la semplicità della costruzione e l' altra per l' approssimazione conseguitavi.

La 1.ª risoluzione del Buonafalce (Fig. 10 - Tav. II). Se AB è il lato del cubo dato, costruiamo il quadrato $ABCD$ che ha per lato AB (ossia, in altri termini, consideriamo una faccia del cubo dato); conduciamo la diagonale BD di questo quadrato, dividiamola in sei parti uguali, e stacchiamo dal lato DA, da D verso A, il segmento DE uguale alla sesta parte della diagonale; uniamo infine E con B. *Il segmento BE rappresenta con un difetto minore di $\frac{2}{1000}$ il lato del cubo doppio di quello dato.* Ciò è provato dalla seguente dimostrazione analitica del

---

(1) Dott. Gaetano Buonafalce: « *Sulla scoperta di un nuovo rapporto geometrico che serve alla soluzione del problema della duplicazione del cubo* ». Pisa, 1876. — 2.ª edizione del predetto lavoro, emendata e con aggiunte. Pisa, 1876. — « *Duplicazione del cubo e quadratura del circolo* » con aggiunte del Dott. Pieraccini. Pisa, 1878.

Padre Angelo Secchi, unita, nel primo lavoro del Buonafalce, alla risoluzione precedentemente esposta:

Supponendo, per semplicità $AB = 1$, è $BD = \sqrt{2}$ e perciò $DE = \frac{\sqrt{2}}{6}$.

Ora dalla figura resulta manifesto che

$$EB = \sqrt{AB^2 + AE^2} = \sqrt{AB^2 + (AD - DE)^2}$$

ossia, sostituendo,

$$EB = \sqrt{1 + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{37 - 6\sqrt{2}}{18}}$$

cioè

$$EB = \frac{\sqrt{2}}{6}\sqrt{37 - 6\sqrt{2}}$$

donde, fatti i calcoli, prendendo cinque decimali della $\sqrt{2}$, troviamo

$$EB = 1{,}25863\ldots$$

e questo valore di EB differisce appunto dalla

$$\sqrt[3]{2} = 1{,}25992\ldots$$

di meno di $\frac{2}{1000}$.

La 3.ª risoluzione del Buonafalce (Fig. 11 - Tav. II). Se il quadrato $ABCD$ rappresenta una faccia del cubo dato, si costruisca il quadrante $\widehat{DKB}$ col centro in C e col raggio CD; si tolga dal lato AB (da B verso A) il segmento BE uguale alla metà della differenza AK della diagonale e del lato del quadrato; e dalla diagonale AC si tolga il segmento CF uguale alla quarta parte del lato del quadrato; infine si conduca la FE e questa incontri il quadrante $\widehat{DKB}$ nel punto G: *il segmento DG rappresenta con un difetto minore di* $\frac{2}{100000}$ *il lato del cubo doppio*

di quello dato. Per dimostrarlo si conducano FH, GL perpendicolari a BC e la FI perpendicolare ad AB. Supposto uguale a 1 il lato del cubo dato, dalle costruzioni dette resulta:

$$EB = \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1) = 0,2071067\ldots, FC = \frac{1}{4}, \widehat{FCH} = 45^\circ$$

e perciò

$$FH = CH = FC \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0,1767767\ldots.$$

Ora:

$$EI = EB - FH; \quad IF = BC - FH$$

ed essendo

$$EI = IF \operatorname{cotg} \widehat{FEI}$$

ne ricaviamo:

$$\operatorname{cotg} FEI = \frac{EB - FH}{BC - FH} = \frac{0,0303300\ldots.}{0,8232233\ldots.} = 0,0368430\ldots.$$

Per brevità, indichiamo rispettivamente con m, n i valori trovati di EB e della cotang $\widehat{FEI}$, e con x chiamiamo il valore di $\overline{GL}$ ossia del cos $\widehat{DKG}$, e perciò con

$$\sqrt{1-x^2}$$

rappresentiamo

$$LC = \operatorname{sen} \widehat{DKG}.$$

Se dal punto G si abbassasse la perpendicolare alla AB (omettiamo questa costruzione nella figura, per maggiore chiarezza) si formerebbe un piccolo triangolo rettangolo con un cateto rappresentato sia dalla differenza $(EB - GL)$ sia da LB cotang FEI; e perciò, per le notazioni stabilite, avremo:

$$m - x = (1 - \sqrt{1-x^2})n$$

donde

$$m - n - x = -n\sqrt{1-x^2}$$

da cui elevando a quadrato, trasportando e raccogliendo:

$$x^2(n^2+1) - 2(m-n)x + m(m-2n) = o.$$

Dalla quale equazione di secondo grado in x, ricaviamo:

$$x = \frac{m - n \pm \sqrt{(m-n)^2 - (n^2+1)(m-2n)m}}{n^2+1} =$$

$$= \frac{m - n \pm n\sqrt{1 - m(m-2n)}}{n^2+1}$$

Sostituendo in questa formula ad m e ad n i loro valori 0, 2071067....; 0, 0368430...., si ottiene, preso il segno superiore,

$$x = \cos DKG = \frac{0,2065941....}{1,0013574....}$$

donde, col calcolo logaritmico, ricaviamo

$$\widehat{DKG} = 78^\circ\, 5'\, 36'',83....$$

Infine

$$\overline{DG} = 2 \operatorname{sen} \frac{DKG}{2} = 2 \operatorname{sen} 39^\circ\, 2'\, 48'',41....$$

e fatto il calcolo logaritmico troviamo

$$\overline{DG} = 1,2599093....$$

mentre la

$$\sqrt[3]{2} = 1,2599209....,$$

onde, come avevamo affermato, $\overline{DG}$ differisce meno ancora di $\frac{2}{100000}$ dal lato del cubo doppio di quello dato.

§ 11. **Metodo del Boccali** (1). — È altresì notevole l' approssimazione conseguita nella soluzione che il Boccali ha dato del problema della duplicazione del cubo;

---

(1) Gaetano Boccali: *Doppio cubo ed altre nuove scoperte geometriche in una semplice spirale poligona* — Camerino, 1884.

trovo però conveniente di stabilire questa soluzione seguendo una via diversa da quella percorsa dal Boccali. Questi, nell' introduzione del suo lavoro, così si esprime: « .... È vero che il Buonafalce ha fatto quattro risolu- » zioni compresa quella encomiata dal Padre Secchi, (che » è la *prima*), delle quali le sole terze e quarta oltrepas- » sano in approssimazione i limiti della mia risoluzione, » ma deve riflettersi ancora che per giungere ad un » resultato geometrico qualunque, conviene tener conto » anche della via che all' uopo si percorre; la via per- » tanto da me percorsa è quella di *vere nuove scoperte* » *geometriche*; per conseguenza sarà sempre più soddisfa- » cente l' incontro della duplicazione del cubo per siffatta » *deliziosa via* piuttosto che per altre vie scabrose di » noiose e complicate costruzioni benchè portino a mag- » giore approssimazione, la quale poi può essere anche » incerta, attesa la complicata costruzione difficilmente » eseguibile con precisione ed esattezza ». Ma da una lettura attenta del lavoro del Boccali resulta abbastanza artificiosa la via da esso pure percorsa e non apparisce nemmeno ben spiegata la costruzione che egli propone per una risoluzione abbastanza approssimata del problema di Delo. Perciò preferisco di ritrovare la soluzione del Boccali con una via del tutto diversa da quella da lui seguita.

Se AB è il lato del cubo dato, costruiamo il lato del decagono regolare stellato inscritto nel cerchio di raggio uguale ad AB, (ciò che può farsi agevolmente colle note costruzioni indicate nella parte *a*) della Fig. 12 - Tav. II). Ciò fatto, prendiamo da una retta r qualunque (Fig. 12 - *b*)) un segmento $A'B'$ uguale al lato del cubo dato e dalla medesima retta, partendo da B' (o da A') stacchiamo un segmento $B'C'$ uguale al lato del decagono regolare stellato precedentemente costruito. Conduciamo dal punto A' la perpendicolare $A'Y$ alla

retta r, e descritta la semicirconferenza che ha per diametro $B'C'$, congiungiamo il punto D', comune ad essa e alla $A'Y'$ con B' e con C'.

Il lato del cubo doppio di quello dato è, coll' approssimazione di $\frac{1}{10000}$ *per eccesso, uguale a*

$$\frac{2}{3}\left(\overline{A'C'} + \overline{D'B'}\right)$$

Infatti, posto $\overline{AB} = 1$, resulta dalle costruzioni dette:

$$BC = \frac{(\sqrt{5}+1)}{2} = C'B' ,$$

$$C'A' = \frac{(\sqrt{5}+1)}{2} - 1 = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2} ;$$

ossia:

$$C'A' = \frac{2,23606797.... - 1}{2} = 0,6180339887....$$

Inoltre, per un noto teorema di geometria,

$$B'D'^2 = C'B' \,.\, A'B'$$

cioè:

$$B'D' = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = \sqrt{\frac{3,23606797....}{2}} = 1,2720196495...$$

Perciò:

$$\frac{2}{3}(A'C' + B'D') = \frac{2}{3}(0,6180339887... + 1,2720196495...) =$$

$$= \frac{2}{3} \times (1,8900536382....) = 1,2600357588....$$

ed essendo la

$$\sqrt[3]{2} = 1,2599209....$$

vediamo appunto che tra il valore dei

$$\frac{2}{3}(A'C' + B'D')$$

e la $\sqrt[3]{2}$ c' è una differenza minore di $\frac{2}{10000}$.

Onde, secondo questa soluzione, se per esempio il lato del cubo dato avesse dieci metri di lunghezza, si avrebbe soltanto l' *eccesso di un millimetro* nel lato resutante pel doppio cubo.

II

§ 12. **Impossibilità di risolvere elementarmente il problema della trisezione dell' angolo.** — Sia φ l' angolo che è proposto di trisecare. Da note formule di trigonometria resulta

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{3\operatorname{tang}\frac{\varphi}{3} - \operatorname{tang}^3\frac{\varphi}{3}}{1 - 3\operatorname{tang}^2\frac{\varphi}{3}}$$

e perciò ponendo $\operatorname{tang}\varphi = a$ e $\operatorname{tang}\frac{\varphi}{3} = x$, abbiamo:

$$a = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2},$$

donde otteniamo l' equazione cubica completa

$$x^3 - 3ax^2 - 3x + a = o. \qquad (1)$$

Dalla quale equazione, fatta la trasformazione $x = y + a$ deduciamo l' equazione cubica ridotta

$$y^3 - 3(1 + a^2)y - 2a(1 + a^2) = o \qquad (2)$$

che è dunque soddisfatta dalla differenza $x - a$, cioè da

$$\left(\operatorname{tang}\frac{\varphi}{3} - \operatorname{tang}\varphi\right).$$

Dimostriamo che l' equazione (2) è *in generale* irriducibile.

Infatti, se essa fosse riducibile il suo primo membro dovrebbe essere decomponibile in un prodotto di due fattori, di cui uno necessariamente lineare, ossia dovrebbe potersi porre sotto la forma

$$(y - \alpha)(y^2 + \beta x + \gamma)$$

ove α, β, γ sono funzioni razionali di a. In particolare se a è razionale, α, β, γ dovrebbero essere razionali; e se poi a è intero, un noto *lemma di* Gauss (art. 11) ci permette di affermare che, nell' ipotesi della riducibilità, il trinomio

$$y^3 - 3(1 + a^2)\, y - 2a(1 + a^2)$$

dovrebbe potersi decomporre in un prodotto

$$(y - \alpha)(y^2 + \beta x + \gamma)$$

dove α, β, γ sono numeri *interi*. Perciò ad ogni valore intero di a, dovrebbe corrispondere un valore intero d' una almeno delle tre radici dell' equazione (2): e corrispondentemente, essendo $x = a + y$, dovrebbe aversi un valore intero per x. Ma è facile verificare che supponendo per esempio $a = 2$, cioè $\operatorname{tang}\varphi = 2$, non è intero nessuno dei tre valori distinti

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi}{3},\ \operatorname{tang}\frac{\varphi + 180^\circ}{3},\ \operatorname{tang}\frac{\varphi + 2\,.\,180^\circ}{3}$$

che corrispondono agli angoli φ, $\varphi + 180^\circ$, $\varphi + 2\,.\,180^\circ$,

aventi per tangente 2. Invero, dalle tavole trigonometriche resulta in tal caso:

$$\varphi = 63^\circ\, 26'\ \ 5'',81 \quad (\text{a meno di } \tfrac{1}{100} \text{ di secondo})$$

e perciò

$$\frac{\varphi}{3} = 21^\circ\ \ 8'\ \ 41'',93 \qquad \text{»}$$

$$\frac{\varphi}{3} + \frac{180^\circ}{3} = 81^\circ\ \ 8'\ \ 41'',93 \qquad \text{»}$$

$$\frac{\varphi}{3} + \frac{2\,.\,180^\circ}{3} = 141^\circ\ \ 8'\ \ 41'',93 \qquad \text{» ;}$$

ed essendo

$$o < \frac{\varphi}{3} < 45^\circ$$

è anche

$$o < \operatorname{tang} \frac{\varphi}{3} < 1;$$

parimente, essendo

$$\frac{\varphi}{3} + \frac{2\,.\,180^\circ}{3} > 135^\circ,$$

e perciò essendo minore di 45° l'angolo supplementare di

$$\frac{\varphi}{3} + \frac{2\,.\,180^\circ}{3},$$

la tangente di questo angolo è pure in valore assoluto compresa fra O e 1. Fatto poi il calcolo per l'angolo

$$\frac{\varphi}{3} + \frac{180^\circ}{3}$$

resulta

$$\operatorname{tang} \frac{\varphi + 180^\circ}{3} = 6,4112\ldots.$$

cioè

$$6 < \operatorname{tang} \frac{\varphi + 180^\circ}{3} < 7.$$

Dunque l' equazione (2) è *in generale* irriducibile, e poichè non è di grado 2^m è irrisolubile per radicali quadratici (art. 11); per conseguenza (art. 10) non è costruibile, per mezzo della riga e del compasso, il segmento y e perciò nemmeno x. È così dimostrato che *è*, **in generale,** *impossibile di risolvere il problema della trisezione dell' angolo col solo uso della riga e del compasso.*

Vediamo ora di giungere alle medesime conclusioni, prendendo a considerare la questione sotto un aspetto diverso (sebbene un po' meno elementare).

Posto $\lambda = u + iv$ ove $u = \cos\varphi$, $v = \operatorname{sen}\varphi$ rappresentano il coseno e il seno dell' angolo φ che è proposto di trisecare, e posto $z = x + iy$ ove

$$x = \cos\frac{\varphi}{3}, \quad y = \operatorname{sen}\frac{\varphi}{3},$$

resulta subito, dalla nota formula di Moivre, l' equazione $z^3 = \lambda$, da cui il problema della trisezione viene così a dipendere.

Dimostriamo anzitutto che *l' equazione* $z^3 = \lambda$ è algebricamente irriducibile, cioè che non può aversi identicamente

$$z^3 - \lambda = \{z - f(\lambda)\}\{z^2 + \mu(\lambda)z + \nu(\lambda)\},$$

designando f, μ, ν funzioni razionali di λ.

Infatti si avrebbe

$$f(\lambda) = \frac{\Psi(\lambda)}{\chi(\lambda)}.$$

ove Ψ, χ denotano due polinomi:

$$\Psi(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots.$$
$$\chi(\lambda) = b_0\lambda^m + b_1\lambda^{m-1} + \ldots.$$

E perciò dovrebbe aversi *identicamente:*

$$\frac{\Psi^3(\lambda)}{\chi^3(\lambda)} = \lambda.$$

Ora che questa uguaglianza non possa essere soddisfatta *identicamente*, cioè per qualunque valore di λ, resulta evidente dall' osservare che supposto che l'espressione $\frac{\Psi^3}{\chi^3}$ equivalga ad un polinomio in λ, il grado di questo polinomio sarà uguale a $3(n-m)$ e perciò mai uguale a 1.

L' equazione considerata $z^3 = \lambda$, rappresenta, come abbiamo detto, l' equazione per la trisezione dell' angolo φ quando si limita la variabilità di λ, ponendo

$$\lambda = \cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi,$$

cioè:

$$\operatorname{mod}\lambda = 1;$$

essa rappresenta d' altra parte l' equazione da cui dipende la *generale moltiplicazione del cubo* per un numero reale arbitrario, quando si limita la variabilità di φ ai valori reali.

Ora dall' essere l' equazione $z^3 = \lambda$ *algebricamente irreducibile* si può desumere che essa è *in generale irreducibile* anche nei due casi

$$\lambda = \cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi \ (\operatorname{mod.}\lambda = 1), \text{ e } \lambda \text{ reale};$$

altrimenti lo spezzamento in fattori di $z^3 - \lambda$ cioè l' uguaglianza

$$z^3 - \lambda = \{z - f(\lambda)\}\{z^2 + \mu(\lambda) \cdot z + \nu(\lambda)\}$$

dovrebbe essere possibile rispettivamente per

$$\lambda = \cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi,$$

o per λ reale; e questo non può accadere senza che tale uguaglianza sussista per *tutti* i valori complessi di λ, giacchè se le due funzioni analitiche

$$z(\lambda) = \sqrt[3]{\lambda} \text{ e } z = f(\lambda)$$

prendono uno stesso valore in tutti i punti d'una linea del piano complesso (rispettivamente sul cerchio dei punti di modulo uguale a 1, e sull' asse reale) non possono prendere valori diversi nel restante piano.

Osservazione. — Le considerazioni precedenti mostrano in un tempo l'irriducibilità *in generale* delle due equazioni, per la trisezione dell'angolo, e per la moltiplicazione del cubo (per un numero reale *arbitrario*), onde si desume l'impossibilità di risolvere geometricamente quei problemi colla retta e col circolo.

Non pertanto vi possono essere *casi particolari* in cui l'equazione sopra considerata diventi riducibile; così p. e. per la duplicazione del cubo, quando λ è il cubo d'un numero intero, ma non per altri valori interi di λ (§ 1).

Anche nel caso della trisezione dell'angolo si hanno casi particolari di riducibilità e quindi *particolari angoli trisecabili* colla riga e col compasso.

Sia ad esempio $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ ove *n non è divisibile per* 3. Per l'ipotesi fatta per n, sappiamo che si possono sempre determinare due numeri interi x, y in modo da soddisfare all'equazione d'analisi indeterminata:

$$nx - 3y = 1.$$

Per così fatti numeri x, y si avrà dunque:

$$\frac{2\pi x}{3} - \frac{2\pi y}{n} = \frac{2\pi}{3n}$$

e quindi l'angolo $\frac{\varphi}{3}$ si potrà determinare come differenza tra l'angolo multiplo dell'angolo $\frac{2\pi}{3}$ (del triangolo equilatero) secondo il numero x, e l'angolo multiplo secondo il numero y dell'angolo $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ *supposto dato.*

Dunque tutti gli angoli $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ *e perciò anche gli angoli* $m\varphi = \frac{2m\pi}{n}$, *ove* n *non è divisibile per* 3, *sono trisecabili per mezzo della riga e del compasso.*

A proposito poi degli angoli $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ trisecabili elementarmente, giova osservare che di questi angoli φ possono costruirsi elementarmente soltanto quelli per cui n decomposto in fattori primi è della forma

$$2^{\nu}\left(2^{2^{\nu_1}}+1\right)\left(2^{2^{\nu_2}}+1\right)\cdots$$

con $\nu_1 > 0$, $\nu_2 > 0, \ldots$ (cfr. art. 11).

§ 13. **Trisezione dell'angolo mediante coniche** [1]. — Dato un angolo ABC qualunque (Fig. 13 - Tav. II) descriviamo una circonferenza che abbia per centro il vertice dell'angolo e un raggio qualunque. Supposto trisecato l'angolo mediante le rette BD, BE, e condotte le corde CD, DE, EA e il diametro BF perpendicolare a DE, vediamo che

$$CD = DE = 2 \,.\, DF,$$

onde già può dirsi che il punto D (dalla cui determinazione dipende evidentemente la trisezione dell'angolo dato) appartiene ad un'iperbole avente il punto C per fuoco, il diametro BF per direttrice e 2 per modulo. Ora il punto A è distante da C del doppio della sua distanza dal diametro BF; esso appartiene inoltre alla perpendicolare alla BF condotta da C, dunque A è un vertice della detta iperbole, e l'altro vertice A' si trova sulla CA dalla

---

[1] Cfr. Giacomo Bellacchi: *Lezioni di Algebra Elementare.* Vol. III. Parte II, pag. 220. Firenze, 1891.

stessa parte di C rispetto al diametro BF, ad una distanza da C uguale ai $\frac{2}{3}$ di CH (essendo $H \equiv AC . BF$). È così fissato l' asse trasverso della detta iperbole, di cui l' altro fuoco sarà sulla retta AA', (esternamente al segmento AA'), a una distanza da A uguale a CA'; ed è così perfettamente determinata l' iperbole che intersecando la circonferenza in principio descritta, individua il punto D e per conseguenza permette di trisecare l' angolo dato ABC.

Che la trisezione d'un angolo possa effettuarsi coll' intersezione d'una circonferenza e d' una conica può vedersi anche in quest' altro modo: [1] Essendo (Fig. 14 - Tav. II) ACB l' angolo, e quindi $\widehat{AB}$ l' arco, da trisecare, prendasi un arco qualunque $\widehat{BD}$ ed un altro $\widehat{AE} = 2\,\widehat{BD}$. Conducendo la tangente AT vediamo che l' angolo TAE è uguale all' angolo BCD; onde immaginando che varî successivamente l' arco BD ed in corrispondenza l' arco AE (mantenendosi costantemente doppio dell' arco BD), si hanno corrispondentemente due fasci di raggi di centri C, A fra loro proiettivi perchè gli angoli di due raggi qualunque del primo fascio e dei loro corrispondenti dell' altro fascio sono uguali. Il luogo geometrico dell' intersezione M dei raggi omologhi CD, AE sarà perciò una conica, e il punto d' intersezione N di questa conica coll' arco AB risolverà il problema della trisezione dell'arco AB (e quindi dell' angolo ACB) avendosi $\widehat{AN} = 2\,\widehat{BN}$ e in conseguenza $\widehat{ACB} = 3\,\widehat{BCN}$.

Si può inoltre vedere che detta conica è un' iperbole equilatera, poichè se pei punti A, C si conducono le parallele alle bisettrici PQ, PR degli angoli delle rette AT, BC, si hanno due coppie di raggi paralleli e omologhi dei due fasci generatori della detta conica, la quale dunque avrà due punti all' infinito e perciò sarà un' iperbole, ed

---

[1] Cfr. Peri e Bellacchi: *I Principii della Moderna Geometria.* Pistoia, 1873.

equilatera, essendo i suoi assintoti ortogonali perchè paralleli rispettivamente alle bisettrici di due angoli adiacenti.

Trattando poi infine della risoluzione dei problemi generali di terzo grado (III. § 19) vedremo che la trisezione d' un angolo può anche ottenersi mediante l' intersezione d' una *parabola completamente tracciata* con una determinata circonferenza.

§ 14. **Trisezione dell' angolo mediante la concoide di Nicomede.** — Se ABC (Fig. 15 - Tav. II) è l' angolo che è proposto di trisecare, conduciamo da un punto qualunque C d' uno dei lati dell' angolo la perpendicolare CA a questo lato, e dal punto A in cui questa perpendicolare incontra l' altro lato, conduciamo la parallela AD a BC. Ciò fatto, descriviamo coll' istrumento già noto (§ 3) la concoide avente il punto B per polo, la retta AC per base e un intervallo uguale al doppio di BA. Se F è il punto in cui questa concoide incontra la retta AD, l' angolo $\widehat{FBE}$ sarà la terza parte dell' angolo dato ABC. Infatti se uniamo il punto A col punto medio H del segmento IF, sarà

$$\overline{AB} = \overline{AH} = \overline{IH} = \overline{HF}$$

e per conseguenza

$$\widehat{ABH} = \widehat{AHB} = 2\,\widehat{AFB} = 2\,\widehat{FBE}$$

onde

$$\widehat{FBE} = \frac{1}{3}\,\widehat{ABC} \qquad c.\ d.\ d.$$

Facendo ancora uso della concoide, può altresì risolversi il problema della trisezione d'un angolo, procedendo in quest' altra maniera: Essendo ABC l'angolo da trisecare (Fig. 16 - Tav. II) si descriva col centro nel vertice B e con raggio arbitrario BA la semicirconferenza $ACMD$. Ciò fatto, si descriva col punto C come polo, col raggio

CB come intervallo e colla retta AB come base, una concoide, che si trovi rispetto alla base dalla stessa parte del polo, (la quale avrà necessariamente il polo come *punto doppio*, essendo il suo intervallo maggiore della distanza del polo dalla base). Se E è il punto in cui la concoide così descritta incontra la semicirconferenza $ACMD$, esternamente all' angolo dato ABC, conducasi la CE e si prolunghi questa retta fino a incontrare in F il prolungamento del diametro AD; sarà

$$\widehat{EFB} = \frac{\widehat{ABC}}{3}.$$

Infatti conducendo il raggio BE, abbiamo

$$\overline{CB} = \overline{BE} = \overline{EF}$$

e per conseguenza

$$\widehat{BCE} = \widehat{CEB} = 2.\ \widehat{EFB};$$

perciò

$$\widehat{ABC} = \widehat{BCE} + \widehat{EFB} = 3\ \widehat{EFB},$$

donde

$$\widehat{EFB} = \frac{\widehat{ABC}}{3}. \qquad c.\ d.\ d.$$

Così conducendo la BG parallelamente alla FG si otterrà l'angolo ABG che rappresenta il terzo dell'angolo dato ABC.

§ 15. **Trisezione dell' angolo mediante la lumaca di Pascal.** [1] — Essendo ABC un angolo qualunque che è proposto di trisecare (Fig. 17 - Tav. III) si descriva una circonferenza che passi pel vertice B dell' angolo

---

[1] Da più d'uno questa curva fu adoperata per la trisezione dell'angolo; pertanto la maniera speciale con cui è quì adoperata sembra attribuibile per la prima volta al Sig. Carmine Aiello (cfr. Anno II del giornale « *Il Pitagora* » N. 4).

dato e abbia il centro O in un punto qualunque del lato BC. Si conducano per B quante rette si vogliano, e, a partire dai punti d' incontro di queste rette colla detta circonferenza, si stacchi da ognuna, nei due sensi opposti, un segmento costante, uguale al raggio. Il luogo geometrico dei punti X, così ottenuti, è una linea del quarto ordine, caso particolare della curva conosciuta col nome di *lumaca o conchiglia di Pascal* [1]. Condotta allora pel centro O la parallela OD al lato AB dell' angolo dato, fino ad incontrare, in D, la curva descritta, e congiunto questo punto D col vertice B dell' angolo, sarà

$$\widehat{ABD} = \frac{\widehat{ABC}}{3}.$$

Infatti se indichiamo con E il punto d' intersezione di BD colla circonferenza, abbiamo

$$\overline{ED} = \overline{EO} = \overline{OB}$$

e per conseguenza:

$$\widehat{EBO} = \widehat{BEO} = 2.\ \widehat{EDO}$$

---

[1] Posto $BX = \rho$, $\widehat{XBC} = \omega$ e indicato con r il raggio OB della circonferenza BEZ, resulta dal triangolo OBZ,

$$r^2 = r^2 + (\rho - r)^2 - 2\, r\, (\rho - r) \cos \omega,$$

da cui riducendo otteniamo:

$$(1)\quad \rho = r\,(1 + 2 \cos \omega)$$

e questa è l' equazione in coordinate polari della curva di sopra descritta. E prendendo invece per coordinate due assi ortogonali, coll' origine in B, e l' asse BO per asse delle ascisse, per le formole di trasformazione delle coordinate polari in coordinate cartesiane, otteniamo dalla (1)

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r\left(1 + \frac{2\ x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

da cui eliminando il denominatore, trasportando, elevando a quadrato e raccogliendo, deduciamo l' equazione (2)

$$(x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2)\ (4\, r\, x + r^2) + 4\, r^2\, x^2 = 0$$

che dunque rappresenta in coordinate cartesiane ortogonali, la suddetta curva.

cioè, essendo

$$\widehat{EDO} = \widehat{ABD}$$

abbiamo:

$$\widehat{EBO} = 2\,\widehat{ABD}$$

ossia

$$\widehat{ABD} = \frac{\widehat{ABC}}{3}. \qquad c.\ d.\ d.$$

§ 16. **Metodi meccanici per la trisezione dell'angolo - Strumenti trisettori.** — Abbiasi lo strumento rappresentato dalla Fig. 18 (Tav. III), dove DFE è un semicerchio (di legno, d'ottone, ecc.) DB un regolo, convenientemente lungo, e disposto tangenzialmente alla semicirconferenza nel punto D, ed AE un altro regolo su cui s'appoggia col suo diametro il semicerchio DFE, e che si prolunga oltre questo semicerchio d'una lunghezza DA uguale al raggio DO. Volendo con questo strumento trisecare un angolo qualunque ABC, lo si dispone, sul piano ove questo angolo è disegnato, in modo che il lato BD del regolo tangente alla semicirconferenza passi pel vertice B dell'angolo dato, il punto A sia su un lato di quest'angolo, e la semicirconferenza sia tangente all'altro lato (ciò che potrà ottenersi scorrendo convenientemente il punto A lungo il lato BA).

Così disposto il *trisettore* rispetto all'angolo ABC, questo è trisecato dalle rette BD, BO. Infatti se F è il punto di contatto del lato BC colla semicirconferenza, poichè O è equidistante da BD e BG appartiene alla bisettrice dell'angolo DBG ma evidentemente

$$\widehat{ABD} = \widehat{DBO}$$

dunque

$$\widehat{ABD} = \widehat{DBO} = \widehat{OBC} \qquad c.\ d.\ d.\ (^1).$$

---

(1) Di questo strumento è fatta una descrizione da Good Arthur *(Tom Tit.)* nella sua opera *La science amusante.* — Analoghe ad esso sono le squadrette meccaniche descritte dall'Ing. Pietro Caminati nel periodico *Il Tartaglia* (Anno I, N.i 4-5).

È altresì degno di menzione il *trisettore* costruito dal Dott. Quintilio Amadori e da lui spiegato nel suo opuscolo « Sulla Trisezione d' un angolo qualunque » stampato a Savona nel 1883. Affinchè sia posto bene in evidenza il principio su cui si fonda il trisettore dell'Amadori, giova premettere le seguenti considerazioni. Dato un angolo qualunque ROS (Fig. 19 - Tav. III), bisechiamolo colla retta LZ, e descritta col centro nel vertice O e con raggio arbitrario, la circonferenza $RZSV$, conduciamo il diametro CD perpendicolare alla bisettrice LZ dell' angolo dato. Presa adesso una riga HQ, convenientemente lunga, e staccatone un segmento PK uguale al diametro della circonferenza descritta, si disponga questa riga sul piano dell' angolo da trisecarsi in modo che il punto P e il punto K appartengano rispettivamente al diametro CD e alla bisettrice LZ. Scorrendo convenientemente lungo queste due rette, si potrà trovare una posizione della riga tale da contenere il punto R; giunti a questa posizione si disegni la retta RPK; ed operando analogamente dall' altra parte della figura si disegni la retta SFK.

I diametri AN, BM corrispondenti ai punti A, B in cui queste due rette RK, SK incontrano ulteriormente la circonferenza, trisecano l' angolo dato ROS.

Infatti, essendo OA ed OB metà respettivamente di PK e FK, ed essendo rettangoli i triangoli POK, KOF, sarà $PA = AK = AO = OB = BF = BK$, ossia il quadrilatero $AKBO$ è un rombo, e dal parallelismo delle rette AK, OB e delle altre due OA, BK segue immediatamente $\widehat{RM} = \widehat{NS}$; ma per lo stesso parallelismo gli angoli PAO, OBF sono uguali entrambi all' angolo $\widehat{MON}$, onde l' arco MN è metà sia dell' arco RN che dell' arco MS e per conseguenza $\widehat{RM} = \widehat{MN} = \widehat{NS}$ e corrispondentemente $\widehat{ROM} = \widehat{MON} = \widehat{NOS}$ c. d. d.

Ciò premesso descriviamo il *trisettore dell' Amadori* rappresentato dalla Fig. 20 (Tav. III). Esso consta di due

parti: di una lamina metallica della forma poligonale *KVELRSTUZ*, come la più opportuna; e d' una riga *YW* dello stesso metallo, colle parti sporgenti indicate nei punti *I*, *H*, e la quale deve agire sovrapposta alla lamina predetta. Nella lamina sono praticate tre aperture, cioè la prima semicircolare *CMND* col centro in *O* sull' asse di simmetria *XK* della figura poligonale, la seconda della forma d' un trapezio isoscele mistilineo *abcd*, avente per asse di simmetria l' asse *XK* predetto, e la cui base maggiore è un arco di 60.° appartenente alla stessa circonferenza a cui appartiene la suddetta semicirconferenza; la terza apertura poi è di forma rettangolare e deve rispondere alle seguenti condizioni: fatto centro in *O* e in *C* con raggio uguale a *CD* si intersechi con due archi di circolo la retta *XK*; la lunghezza compresa fra queste due intersezioni sarà la lunghezza della terza apertura che deve indicare il percorso del punto *I* della riga lungo la *XK*.

Nella riga *YW* devono essere praticati due fori circolari in corrispondenza delle due parti sporgenti della medesima, e tali che siano soddisfatte le seguenti condizioni: 1.° il loro diametro, come quello del perno cilindrico che devono ricevere, deve essere tale che il perno di congiunzione in sistema della riga colla lamina non sia impedito nella sua corsa entro la terza apertura e non succeda alcuna oscillazione nella corsa medesima; 2.° la distanza fra il centro del foro nella riga al punto *I* ed il punto della circonferenza del secondo foro in *H*, più vicino al centro del foro *I*, sia *esattamente* uguale al diametro *CD*; 3.° che i centri dei due fori si trovino sulla retta *MA* (orlo della riga).

Il congiungimento delle due parti del trisettore è effettuato mediante un perno a due teste applicato al punto *I* e un altro perno applicato nel punto *H*.

L' Amadori dà inoltre nel suo opuscolo varî altri suggerimenti d' indole pratica circa lo spessore della lamina

e la costruzione dei detti perni e circa l' effettivo congiungimento in sistema delle due parti del trisettore, affinchè questo sia facilmente maneggiabile e si trovi nelle condizioni più favorevoli per servire all' uopo pel quale è costruito. Vediamo come si adoperi questo strumento per trisecare un angolo qualunque: dato un angolo qualsivoglia POQ (vedi ancora la Fig. 20) bisechiamolo colla KX e si adagi poi il trisettore sul piano dell' angolo in modo che il punto O del trisettore si trovi nel vertice O dell'angolo e che le Oh, mn incise sul trisettore si trovino sulla bisettrice KX. Il semicerchio $CMND$ del trisettore intersecherà i lati PO, OQ dell'angolo nei punti M, N; si disegni allora l' arco di cerchio $\widehat{ahd}$ e poi, applicando le dita alla testa del perno in H, si faccia scorrere la riga mantenendo sempre il perno sottoposto a contatto collo spessore della lamina lungo il diametro CD. Quando il prolungamento HY della riga passerà pel punto M, si fissi la riga chiudendo la vite in I e si conduca nella seconda apertura la retta IA fino all' incontro dell' arco $\widehat{ahd}$. Si ripeta, volendo, l' operazione dall' altra parte per determinare il punto B, e poi si levi lo strumento e si disegnino le rette AOG, BOF le quali trisecheranno esattamente l' angolo POQ (1).

§ 17. **Trisezione approssimata dell' angolo secondo E. Cominotto** (2). — Sia ABC (Fig. 21 - Tav. III) l' angolo e quindi AC l' arco (d' una circonferenza descritta col centro in B e con un raggio arbitrario) che è proposto di trisecare. Dividiamo il raggio BC in tre parti uguali nei punti D, E e sul prolungamento di questo raggio,

---

(1) Altri *trisettori degli angoli* sono stati ideati e costruiti da Adriano Lorenzoni (Bologna 1827) e da Ambrogio Fusinieri (Vicenza 1822).

(2) *Trisezione approssimata dell' angolo* - Padova 1895.

oltre B, si porti $BF = BD = DE = EC$. Descriviamo l' arco DG di centro B e raggio BD, e la semicirconferenza di centro E e raggio DE, dalla quale staccheremo da C verso D l' arco $CH = \widehat{DG}$. Congiunto D con H si costruisca l' arco CI, di centro D e raggio DC, compreso fra DC e DH; si unisca poi F con I e si costruisca l' arco CK, di centro F e raggio FC, compreso tra FC ed FK. La semicirconferenza che passa per K, I, C, (essendo evidentemente CI perpendicolare ad FK) interseca l' arco AC nel punto T *che assai prossimamente determina la terza parte di* AC. Facciamo infatti vedere che già una buona approssimazione ci è data per un arco di 180°; potremo allora dedurne che a più forte ragione si avrà un resultato abbastanza approssimato per un arco più piccolo. Ripetendo dunque la precedente costruzione (come è indicato dalla Fig. 22) pel caso particolare di un angolo ABC piatto, e quindi d' un arco AC di 180°, vediamo di quanto la corda CT si discosta dal raggio, che, per semplicità, supporremo uguale a 1. A tale uopo calcoliamo le coordinate del punto T rispetto al centro B; esse ci saranno fornite dalle soluzioni comuni delle equazioni dei cerchi CTA, TKC rispettivamente di centro B e V, riferite all' origine B.

L' equazione del cerchio CTA, nell' ipotesi fatta del raggio uguale a 1, è:

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{1}$$

Per scrivere l' equazione del cerchio KTC, occorre calcolarne il raggio VC e le coordinate del centro. Ora

$$VC^2 = \frac{1}{4}(CK^2) = \frac{1}{4}(IC^2 + IK^2)$$

e poichè

$$IC = \frac{2}{3}\sqrt{2} \quad \text{e} \quad IK = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2} = \frac{2}{3}(2 - \sqrt{2})$$

è dunque

$$VC^2 = \frac{1}{4}\left[\frac{8}{9} + \frac{4}{9}(2-\sqrt{2})^2\right] = \frac{4(2-\sqrt{2})}{9}$$

Per calcolare poi le coordinate del centro V si congiunga K coll' intersezione U della semicirconferenza KIC col raggio BC, e indicato con x_o, y_o dette coordinate, poichè $UC = IK$, $UK = IC$, avremo:

$$x_o = 1 - \frac{1}{2}IK = 1 - \frac{1}{3}(2-\sqrt{2}) = \frac{1+\sqrt{2}}{3}$$

$$y_o = \frac{1}{2}KU = \frac{1}{2}IC = \frac{1}{3}\sqrt{2}$$

onde l' equazione del cerchio KTC è

$$\left(x - \frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{4(2-\sqrt{2}}{9}. \quad (2)$$

Da questa ricaviamo

$$x - \frac{1+\sqrt{2}}{3} = \sqrt{\frac{4(2-\sqrt{2})}{9} - \left(y - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}$$

e perciò, per la (1) abbiamo:

$$\sqrt{1-y^2} = \frac{1+\sqrt{2}}{3} + \sqrt{\frac{4(2-\sqrt{2})}{9} - \left(y - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2},$$

da cui

$$\sqrt{9-9y^2} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{6 - 4\sqrt{2} - 9y^2 + 6y\sqrt{2}}$$

donde

$$1 - \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{9-9y^2}} = \sqrt{\frac{6 - 4\sqrt{2} - 9y^2 + 6y\sqrt{2}}{9-9y^2}}.$$

Da cui, quadrando, resulta

$$1 + \frac{(1+\sqrt{2})^2}{9-9y^2} - 2 \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{9-9y^2}} =$$

$$= \frac{6 - 4\sqrt{2} - 9y^2 + 6y\sqrt{2}}{9-9y^2}$$

cioè

$$9 - 9y^2 + (1+\sqrt{2})^2 - 2(1+\sqrt{2})\sqrt{9-9y^2} =$$

$$= 6 - 4\sqrt{2} - 9y^2 + 6y\sqrt{2}$$

da cui, riducendo, abbiamo

$$1 - \frac{y\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{9-9y^2}}{3}.$$

Quadrando, raccogliendo y^2, e riducendo, abbiamo

$$y^2\left(\frac{2}{(1+\sqrt{2})^2} + 1\right) - 2\frac{y\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = o$$

donde, dividendo per y,

$$y = \frac{2\sqrt{2}}{\dfrac{2+(1+\sqrt{2})^2}{1+\sqrt{2}}} = \frac{4+2\sqrt{2}}{5+2\sqrt{2}} = 0{,}874\ldots$$

E perciò

$$x = \sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-0{,}874^2}\ldots = 0{,}485\ldots$$

Se $\overline{CT}$ fosse stato esattamente il raggio del cerchio CTA le coordinate T avrebbero dovuto essere

$$y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866\ldots$$

$$x_1 = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

e questi valori si scostano ben poco dai valori trovati per y, x, calcolando la $\sqrt{2}$ e la $\sqrt{3}$ a meno di 1 millesimo; onde calcolando con una maggiore approssimazione la $\sqrt{2}$ e la $\sqrt{3}$, i valori di y e di y_1 e così quelli di x e di x_1 si avvicineranno sempre più. Stando ai valori precedenti di x, y

$$CT = \sqrt{(1-x)^2 + y^2} = 0{,}96\ldots$$

onde lo scostamento di CT dal raggio è minore di $\frac{4}{100}$. Così vediamo che l'approssimazione raggiunta con questa costruzione, anche per un arco di 180° è tale da sfuggire nell'uso della riga e del compasso, e perciò essa diventa tanto più grande per un arco minore, come di solito si usa prendere, sì da essere inapprezzabile l'errore commesso.

Il Cominotto stesso, nel suo opuscolo citato (da cui è tratta la materia di questo paragrafo) riporta anche la seguente costruzione approssimata per la trisezione dell'angolo, che è molto semplice e colla quale si commette un errore inapprezzabile *per angoli abbastanza acuti.*

Essendo ABC l'angolo (Fig. 23 - Tav. III) e DC l'arco (della circonferenza di centro B e di raggio arbitrario BD) da trisecare, si conduca la bisettrice BF dell'angolo DBE, e dal punto H in cui questa incontra l'arco DE si riporti sulla bisettrice stessa il segmento HF uguale al raggio. Se E' è il punto diametralmente opposto ad E, la congiungente $E'F$ interseca l'arco DE in G che prossimamente determina la terza parte di esso. Ma ripetendo questa costruzione per un arco di 180° lo spostamento di HG dal raggio riesce già troppo sensibile coll'uso stesso della riga e del compasso; e d'altronde dal calcolo stesso apparisce che supposto il raggio uguale a 1, si ha per DG (beninteso nell'ipotesi di $\widehat{DE} = 180°$) un valore inferiore a 1 di più d'un decimo. Questa costruzione è riferita dal Cominotto come già nota, ma è

ad essa preferibile, pel molto maggiore grado d'approssimazione conseguitovi, l'altra costruzione che abbiamo esposto, del Cominotto stesso.

§ 18. **Trisezione approssimata dell'angolo secondo Pompeo Monti** (1). — Essendo ABC l'angolo (Fig. 24 - Tav. III) e quindi AC l'arco da trisecare, conduciamo la bisettrice BD dell'angolo dato, tiriamo da D la DE parallela a BA e su questa riportiamo in DG la metà del raggio BD. Conduciamo AD e BG e indichiamo con H il punto d'intersezione di queste due rette. Costruiamo dalla parte inferiore di BD la BL in modo da formare con BD l'angolo $LBD = \widehat{BDG}$; dal punto M preso ad un sesto del raggio BD a partire da B, innalziamo la MN perpendicolare a BD. La NH prolungata incontra l'arco AC nel punto T che *prossimamente determina la terza parte dell'arco AC e quindi dell'angolo ABC*. La dimostrazione che segue è del professor Schiaparelli.

Premettiamo che per la detta costruzione

$$HD = \frac{1}{3} AD,$$

perchè i triangoli AHB, HDG sono simili e AB è doppio di DG.

Ciò premesso poniamo $\widehat{ABD} = \varphi$; sarà

$$\widehat{BDA} = 90^\circ - \frac{1}{2}\varphi, \quad \overline{DA} = 2 \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}$$

e quindi

$$\overline{DH} = \frac{2}{3} \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}$$

supposto uguale a 1 il raggio.

---

(1) *Regola generale per la soluzione grafica della trisezione dell'angolo* di Pompeo Monti, disegnatore presso l'Ufficio Tecnico di Milano; seguita dalla *Dimostrazione* del prof. Giovanni Schiaparelli.

Allora si può risolvere il triangolo BHD conoscendone i lati HD, BD e l' angolo $\widehat{HDB}$, e si calcolerà così il lato HB e l' angolo HBD che indichiamo con β. Si passa allora a risolvere il triangolo BHN avendosi elementi cogniti sufficienti e precisamente

$$BH,\ BN = \frac{BM}{\cos\beta} = \frac{1}{6\cos\beta} \quad \text{e} \quad \widehat{NBH} = 2\beta.$$

Si calcolerà così l' angolo BHN che indichiamo con α; e allora passeremo a risolvere il triangolo BHT conoscendone

$$BH,\ BT = 1 \ \text{e}\ \widehat{BHT} = 180^0 - \alpha;$$

e potrà perciò calcolarsi l' angolo $\widehat{TBH}$ che indichiamo con ε.

Ora manifestamente $\varepsilon + \beta = TBD$, e questo angolo dovrebbe essere uguale a $\frac{1}{3}\varphi$ se la trisezione fosse effettuata rigorosamente colla esposta costruzione; ma poichè ciò non è possibile, essendovi fatto uso soltanto della riga e del compasso, si deve esser commesso necessariamente un errore dato dunque dalla differenza

$$\left| (\beta + \varepsilon) - \frac{\varphi}{3} \right|.$$

La tavola che segue dà per tutti i valori di φ di 5° in 5° da 0 a 90° il valore di $\frac{1}{3}\varphi$ e il valore di $\widehat{TBD} = \beta + \varepsilon$, quale resulta dai calcoli precedentemente indicati. L' ultima colonna pone in evidenza l' errore e l' ispezione di questa colonna mostra che l' errore è sempre molto piccolo e tale da sfuggire alle costruzioni grafiche ordinarie, anche fatte con molta diligenza; esso

non arriva mai a 7 minuti di grado, quantità realmente assai tenue in questo genere di costruzioni.

Tabella di comparazione dell' angolo $TBD = \beta + \varepsilon$ col vero valore $\frac{1}{3}\varphi$.

φ	$\frac{1}{3}\varphi$	$\widehat{TBD} = \beta + \varepsilon$	Errore
0°	0	0	0
5°	1° 40′	1° 40′	0
10°	3° 20′	3° 20′ 1″	+ 0′ 1″
15°	5°	5° 0′ 2″	+ 0′ 2″
20°	6° 40′	6° 40′ 4″	+ 0′ 4″
25°	8° 20′	8° 20′ 6″	+ 0′ 6″
30°	10°	10° 1′	+ 1′
35°	11° 40′	11° 41′ 7″	+ 1′ 7″
40°	13° 20′	13° 22′ 4″	+ 2′ 4″
45°	15°	15° 3′ 2″	+ 3′ 2″
50°	16° 40′	16° 44′ 1″	+ 4′ 1″
55°	18° 20′	18° 25′ 1″	+ 5′ 1″
60°	20°	20° 5′ 1″	+ 5′ 9″
65°	21° 40′	21° 46′ 6″	+ 6′ 6″
70°	23° 20′	23° 26′ 8″	+ 6′ 8″
75°	25°	25° 6′ 7″	+ 6′ 7″
80°	26° 40′	26° 45′ 2″	+ 5′ 2″
85°	28° 20′	28° 22′ 6″	+ 2′ 6″
90°	30°	29° 58′ 5″	— 1′ 55″

Questa costruzione è molto più approssimata di quella stessa del Cominotto (§ 17) attesochè se la ripetiamo per un angolo piatto e facciamo tutti i calcoli suddetti, troviamo per la corda dell' arco che prossimamente rappresenta la terza parte della semicirconferenza, un valore che differisce dal raggio di meno di $\frac{2}{1000}$.

III

§ 19. **Problemi di 3.° grado: loro risoluzione mediante una parabola fissa.** — Dai particolari problemi innanzi considerati eleviamoci ora alla considerazione generale dei *problemi di 3.° grado o riducibili a problemi di 3.° grado*, cioè di quei problemi che colla riga e col compasso (operazioni razionali ed estrazioni di radici quadrate) si riconducono alla costruzione delle radici di una o di successive equazioni di 3.° grado.

Lo stesso procedimento che ha servito pei casi considerati nel § 2 conduce ancora a mostrare che *si possono risolvere tutti i problemi di 3.° grado mediante una parabola completamente tracciata facendo uso della riga e del compasso.*

Sia data la parabola $y = x^2$. Tagliamola col cerchio di centro (α, β) passante pel vertice (o, o) di questa parabola, e perciò d' equazione

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 \qquad (1)$$

ossia

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = o\,.$$

Ponendo in quest' equazione $y = x^2$, si ottiene l' equazione resultante

$$x^4 - (2\beta - 1)\,x^2 - 2\alpha x = o$$

ossia (dividendo per x)

$$x^3 - (2\beta - 1)\,x - 2\alpha = o\,. \qquad (2)$$

Ora l' equazione la più generale di terzo grado si può ridurre al tipo precedente, giacchè effettuando una trasformazione razionale essa prende la forma:

$$x^3 - px + q = o\,,$$

sicchè basta prendere

$$p = 2\beta - 1$$
$$q = -2\alpha\,.$$

Resta così stabilito il precedente enunciato, che costituisce una immediata generalizzazione di quanto abbiamo visto nel § 2. Invero ricadiamo nel caso della duplicazione del cubo di lato α prendendo $\beta = \frac{1}{2}$. Otteniamo invece la trisezione di un angolo φ la cui tangente trigonometrica sia uguale ad a, prendendo:

$$\alpha = a(1 + a^2)$$
$$\beta = \frac{1 + 3(1 + a^2)}{2}$$

§ 20. **Riduzione di tutti i problemi di 3.° grado alla trisezione dell' angolo.** — Mostriamo ora un interessante legame fra ogni problema di 3.° grado ed il problema speciale della trisezione dell' angolo. Ad un problema generale di 3.° grado corrisponde un' equazione di terzo grado completa, la quale può sempre, con una trasformazione razionale, esser privata del termine di secondo grado e ridursi al tipo generale:

$$z^3 - pz + q = o \qquad (1)$$

Adesso è facile vedere che con un' altra trasformazione $z = \lambda y$, quest' equazione può identificarsi coll' equazione da cui dipende la trisezione di un angolo (§ 12).

$$y^3 - 3(1 + a^2)y - 2a(1 + a^2) = o \qquad (2)$$

determinando convenientemente λ ed a. Posto infatti nella (1) $z = \lambda y$, ne deduciamo:

$$\lambda^3 y^3 - p\lambda y + q = o$$

ossia, dividendo per λ^3,

$$y^3 - \frac{p}{\lambda^2} y + \frac{q}{\lambda^3} = o .$$

E perciò affinchè si abbia la detta identificazione delle equazioni (1), (2) è necessario e sufficiente che λ ed a soddisfino alle due relazioni seguenti:

$$\begin{cases} \dfrac{p}{\lambda^2} = 3\,(1 + a^2) & (3) \\[2ex] \dfrac{q}{\lambda^3} = -\,2a\,(1 + a^2) & (4) \end{cases}$$

Da queste, dividendo membro a membro, ricaviamo:

$$\frac{p\lambda}{q} = -\frac{3}{2a}$$

da cui

$$a = -\frac{3q}{2p\lambda} . \qquad (5)$$

Sostituendo nella (3) quest' espressione della a ne deduciamo

$$\frac{p}{\lambda^2} = 3\left(1 + \frac{9q^2}{4p^2\lambda^2}\right)$$

cioè

$$12p^2\lambda^2 = 4p^3 - 27\,q^2$$

donde:

$$\lambda = \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{4p^3 - 27q^2}{3}} \qquad (6)$$

e, per la (5),

$$a = -\frac{3q}{\sqrt{\dfrac{4p^3 - 27q^2}{3}}} . \qquad (7)$$

Le relazioni (6), (7) mostrano che λ ed a sono esprimibili pei coefficienti p, q dell'equazione (1) per mezzo di operazioni razionali e d'estrazioni di radici quadrate; onde (art. 10) resulta dimostrato che: *ogni problema di 3.° grado può ridursi mediante la riga e il compasso alla trisezione di un angolo (elementarmente costruibile)*, ossia *può risolversi per mezzo della riga, del compasso e di un trisettore degli angoli.*

Osservazione. — Vi sono molte questioni il cui enunciato appartiene alla Geometria elementare che vengono a dipendere da problemi di 3.° grado.

Tali sono per esempio tutti quei problemi (di 4.° grado) che si risolvono naturalmente coll'intersecare due coniche, p. es. trovare i punti del piano pei quali le somme o le differenze delle distanze relativamente a due coppie di punti dati hanno valori assegnati; oppure trovare i punti del piano che distano ugualmente da un punto e da una retta data ed hanno da un punto dato una distanza assegnata ecc. Citeremo ancora la costruzione dei poligoni regolari di 7, 9, 13 lati (art. 11) ecc.

Di tutti questi problemi si può assegnare una risoluzione grafica esatta mediante la riga, il compasso ed un trisettore degli angoli. E pei bisogni pratici (quando non si disponga d'un trisettore) si può dare per ciascuno di questi problemi una risoluzione approssimata adoperando i metodi svolti nei §§ 17, 18.

ARTICOLO QUATTORDICESIMO

« **Sui problemi trascendenti e in particolare sulla quadratura del circolo** » di Benedetto Calò a Teramo.

§ 1. **Problemi algebrici e trascendenti.** — Negli art. 10, 11 sono state studiate, dal punto di vista della Geometria analitica e dell' Algebra, le questioni relative alla risolubilità dei problemi per via elementare, cioè colla riga e col compasso.

Quando sia proposto un problema costruttivo, si trasformi anzitutto in modo che i *dati* sieno punti (poniamo p. e. in un piano), e gli elementi incogniti sieno anch' essi dei punti aventi coi dati relazioni assegnate.

Affinchè il problema proposto sia risolubile elementarmente, occorre e basta che

a) le relazioni assegnate si possano tradurre con equazioni algebriche (cioè il problema sia *algebrico*);

b) le equazioni algebriche in discorso sieno risolubili con operazioni razionali ed estrazioni di radici quadrate (a partire dalle coordinate dei punti dati).

Le questioni relative alla possibilità di risolvere nel modo anzidetto (con irrazionalità quadratiche) un' equazione algebrica hanno trovato posto negli art. 11, 12, 13.

Noi ci rivolgiamo qui al primo gruppo di questioni tendenti a decidere dell' *algebricità*, o per contrapposto della *trascendenza* di un dato problema. Ed avvertiamo subito che i problemi trascendenti debbono riguardarsi come più elevati degli algebrici in questo senso, che la risoluzione loro non solo non è effettuabile colla retta e col circolo (riga e compasso), ma nemmeno col tracciamento di curve algebriche superiori (come quelle utilizzate nell' art. 13), o cogli istrumenti atti a descrivere tali curve.

Per procedere nelle nostre considerazioni, prendiamo le mosse dal classico problema della quadratura del circolo.

Traduciamo anzitutto questo problema in forma analitica.

Se indichiamo con r il raggio di un cerchio, con d il suo diametro, con c la circonferenza e con a la sua area, abbiamo

$$c = \pi d = 2 \pi r \tag{1}$$

$$a = \pi r^2 = \frac{1}{4} \pi d^2 = \frac{1}{2} r \cdot c ; \tag{2}$$

ove π è il rapporto costante della circonferenza al diametro.

Dalla formola (2) risulta il noto fatto che l' area del cerchio equivale all' area di un triangolo avente per base la circonferenza e per altezza il raggio del cerchio. Se dunque siamo in grado di costruire colla riga e col compasso un segmento equivalente alla circonferenza, partendo dal raggio, se, cioè, sappiamo effettuare elementarmente la rettificazione del cerchio, potremo costruire il detto triangolo e trasformare poi facilmente questo, sempre facendo uso della riga e compasso, in un quadrato equivalente. E inversamente, se mediante una costruzione elementare si potesse trasformare il cerchio in un quadrato equivalente, trasformando poi questo in

un triangolo equivalente avente per altezza il raggio del cerchio, si otterrebbe mediante una costruzione elementare la rettificazione del cerchio.

Il problema della quadratura del cerchio si trova così ricondotto a quello della rettificazione della circonferenza. E se, per semplicità, scegliamo come unità di misura il diametro, quest' ultimo problema si riduce all' altro di costruire un segmento di lunghezza π (o brevemente *costruire* π) a partire dal segmento unità.

È ovvio che al segmento stesso si può dare una posizione assegnata, in modo che il problema sia posto sotto la forma in cui abbiamo detto di considerare un problema costruttivo; in modo, cioè, che i dati sieno punti (il centro $[o, o]$ ed un punto del cerchio $[o, 1]$), e gli elementi incogniti siano anch' essi dei punti (p. es. il punto $[o, \pi]$).

Ma, così essendo posto il problema, non appare se esso venga a dipendere o no dalla risoluzione di un' equazione algebrica, giacchè, invero, non viene posta in evidenza alcuna equazione da risolvere, di cui π sia radice.

Guardiamo di generalizzare il problema, da cui siamo partiti, considerando la questione della *rettificazione di un arco circolare qualsiasi.*

Dell' arco possiamo supporre *data* (oltre il raggio preso come unità) la *corda*, oppure il *seno*, ciò che è equivalente pel nostro scopo.

Il problema della rettificazione dell' arco viene quindi a dipendere dalla risoluzione dell' equazione

$$y = \text{arcsen } x \, .$$

E poichè questa equazione è trascendente, *il problema è in generale trascendente,* sicchè *non è possibile assegnare una determinata costruzione generale algebrica, e tanto meno elementare* (cioè *effettuabile colla riga e compasso*), *mediante la quale, data la corda* (o *il seno*) *dell' arco, si ottenga la lunghezza dell' arco.*

Se, p. es., una costruzione elementare determinata fosse in generale possibile, si troverebbe una determinata espressione di x, formata con operazioni razionali e radici quadrate, la quale per *tutti* i valori di x fornirebbe y. Quindi la y risulterebbe radice di un' equazione algebrica, i cui coefficienti sarebbero funzioni razionali di x (cfr. art. 11), cioè la y sarebbe una funzione algebrica della x. Ora una funzione trascendente come la $y = \text{arcsen } x$ (che, nel piano complesso, ha infiniti rami) non può certo equivalere ad una funzione algebrica.

Ma se è impossibile dare algebricamente, ed *a fortiori* in modo elementare, la risoluzione *generale* del problema della rettificazione dell' arco, non ne segue per questo *a priori* che la risoluzione stessa non possa ottenersi, sia trovando *per ogni corda* (o *seno*) assegnata una *particolare* costruzione algebrica o elementare la quale fornisca l' arco; sia trovando una costruzione siffatta *per archi particolari*, ad esempio, quando la corda (o il seno) dell' arco da rettificare è espressa pel raggio mediante operazioni razionali e radici quadrate, e quindi è essa stessa elementarmente costruibile; in particolare, nel caso corrispondente alla rettificazione dell' intero cerchio. Ed infatti, se la curva $y = \text{arcsen } x$ è trascendente e quindi non può coincidere intieramente con una curva algebrica, chi ci dice che le coordinate di *ogni* punto di essa non possano soddisfare ad una particolare equazione algebrica a coefficienti razionali (variabile da punto a punto), o almeno che essa non contenga punti *particolari,* le cui coordinate soddisfino ad una tale equazione, ed in special modo punti aventi come coordinate delle espressioni irrazionali quadratiche, a cui corrisponderebbero appunto degli archi rettificabili?

Chi ci assicura che il punto $[o, \pi]$ di essa non si trovi fra i punti particolari accennati?

Tale questione esce, come si vede, dal campo della teoria delle funzioni, per entrare nel dominio dell' aritmetica.

Dando forma più generale alle conclusioni che emergono dalla precedente discussione, possiamo dire:

La questione, di decidere se un problema assegnato sia algebrico o trascendente, si presenta diversamente a seconda che si considera un problema in cui i dati sono variabili o fissi. Nel primo caso, se le equazioni che legano le incognite ai dati sono trascendenti, il problema è trascendente, ed è impossibile una *generale risoluzione* algebrica valida indipendentemente dai valori dei dati.

Quando si tratti di un problema in cui i dati sono fissi, o (ciò che è lo stesso) quando i dati, pur capaci di variare, si considerino fissati in un modo particolare, occorre domandarsi se le equazioni trascendenti, che legano le incognite ai dati, in quanto servono alla determinazione delle incognite, non possano essere rimpiazzate con equazioni algebriche.

Guardando le cose sotto quest' ultimo aspetto, l' esistenza stessa di problemi (aritmeticamente) trascendenti può essere posta in dubbio. Il dubbio si riattacca alla domanda:

Esistono dei numeri (trascendenti) non soddisfacenti ad alcuna equazione algebrica a coefficienti razionali?

Soltanto dopo avere risolto affermativamente la predetta questione (nel § 3), ci volgeremo a quella, da cui dipende la quadratura del circolo:

Il numero π deve porsi tra i numeri trascendenti?

Diciamo fin d' ora che anche per questa seconda questione la risposta è affermativa (§§ 4, 5, 6); essa chiude l' êra dei tentativi infruttuosi rivolti a cercare, per via elementare, *la quadratura del circolo*, mostrando che *il problema stesso non è risolubile nè elementarmente, cioè mediante rette e circoli, nè col tracciamento di curve algebriche più elevate.*

Nel § 6 si troverà ancora l' estensione di questi resultati relativa al problema generale della rettificazione dell' arco.

Abbiamo poi esposto nel § 7 una breve descrizione dell' integrafo di Abdank-Abakanowicz e della soluzione grafica ch' esso fornisce del problema di rettificazione e quadratura del cerchio; e nel § 8 si trovano citate alcune delle costruzioni elementari più comuni per la risoluzione approssimata del problema stesso. Il § 9 è dedicato alla considerazione di alcune superficie limitate da archi di cerchio e quadrabili elementarmente. Infine col § 10 chiuderemo il presente lavoro, riassumendo brevemente in un quadro storico le principali ricerche relative al problema della quadratura del cerchio, dai tempi antichi fino ai nostri giorni.

§ 2. **Prime proprietà dei numeri algebrici.** — Diciamo col Kronecker *numero algebrico* ogni numero x che è radice di un' equazione algebrica della forma

$$c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \ldots + c_n = 0 ,$$

a coefficienti razionali, la quale, moltiplicata per un conveniente numero intero, potrà sempre ridursi ad avere coefficienti interi.

Osserviamo subito che da questa definizione non restano esclusi i numeri radici di equazioni algebriche i cui coefficienti sono numeri algebrici, ossia la definizione data di numero algebrico è la più generale possibile; ciò resulta dal seguente teorema [1]:

Ogni radice di un' equazione algebrica a coefficienti algebrici è ancora radice di un' equazione algebrica a coefficienti interi.

---

[1] Cfr. l' opera di P. Bachmann: *Vorles. über die Natur der Irrationalzahlen.* Lipsia 1892; opera che abbiamo spesso consultata nella compilazione di questo lavoro.

Ed invero, sia il numero ω radice dell'equazione

$$(1) \qquad x^n + \alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} + \ldots + \gamma = o,$$

ove α, $\beta, \ldots \gamma$ siano numeri algebrici, cioè rispettivamente radici di equazioni della forma seguente:

$$(2) \qquad \begin{cases} x^a + A_1 x^{a-1} + A_2 x^{a-2} + \ldots + A_a = o, \\ x^b + B_1 x^{b-1} + B_2 x^{b-2} + \ldots + B_b = o, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^c + C_1 x^{c-1} + C_2 x^{c-2} + \ldots + C_c = o, \end{cases}$$

in cui i coefficienti sian tutti numeri razionali.

Indichiamo con p il prodotto $n \,.\, a \,.\, b \ldots c$ e con $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_p$ tutti i prodotti della forma

$$\omega^{n'} \,.\, \alpha^{a'} \,.\, \beta^{b'} \ldots \gamma^{c'} \qquad \begin{cases} n' = o, 1, 2, \ldots n-1, \\ a' = o, 1, 2, \ldots a-1, \\ b' = o, 1, 2, \ldots b-1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ c' = o, 1, 2, \ldots c-1, \end{cases}$$

che sono appunto in numero di p.

È facile vedere che i p prodotti $\omega\omega_1, \omega\omega_2, \ldots \omega\omega_p$ si possono esprimere nel modo seguente

$$\omega\omega_i = k_{i1}\,\omega_1 + k_{i2}\,\omega_2 + \ldots + k_{ip}\,\omega_p$$
$$(i = 1, 2, \ldots p),$$

ove i numeri k_{rs} sono tutti razionali.

Ed infatti, abbiamo

$$\omega\omega_i = \omega^{n'+1} \,.\, \alpha^{a'} \,.\, \beta^{b'} \ldots \gamma^{c'};$$

ora distinguiamo due casi:

1.° sia $n' < n - 1$; allora $n' + 1 < n$, e perciò $\omega\omega_i$ equivale ad una delle p quantità $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_p$;

2.° sia $n' = n - 1$; allora $n' + 1 = n$, e perciò $\omega^{n'+1} = \omega^n$; ma, essendo ω radice dell' equazione (1), varrà l' identità

$$\omega^n = -\alpha\omega^{n-1} - \beta\omega^{n-2} - \ldots - \gamma,$$

quindi

$$(3) \qquad \omega\omega_i = -\omega^{n-1} \cdot \alpha^{a'+1}\beta^{b'}\ldots\gamma^{c'} -$$
$$- \omega^{n-2}\alpha^{a'}\beta^{b'+1}\ldots\gamma^{c'} - \ldots - \alpha^{a'}\beta^{b'}\ldots\gamma^{c'+1};$$

prendiamo ora a considerare il primo termine del secondo membro, cioè

$$(t) \qquad \omega^{n-1} \cdot \alpha^{a'+1} \cdot \beta^{b'}\ldots\gamma^{c'};$$

possiamo distinguere ancora due casi:

o si ha $a' < a - 1$, ed allora $a' + 1 < a$, e perciò il termine stesso equivale ad una delle p quantità

$$\omega_1,\ \omega_2, \ldots \omega_p;$$

ovvero è $a' = a - 1$, ed allora $a' + 1 = a$, e perciò $\alpha^{a'+1} = \alpha^a$; ma, essendo α radice della prima delle equazioni (2), varrà l' identità

$$\alpha^a = -A_1\alpha^{a-1} - A_2\alpha^{a-2} - \ldots - A_a.$$

Sostituendo dunque nel termine (t) in luogo di $\alpha^{a'+1}$ quest' ultima espressione, il termine stesso risulterà una funzione lineare ed omogenea delle p quantità $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_p$ con coefficienti razionali. Lo stesso potendo ripetersi per ogni termine del secondo membro della (3), anche $\omega\omega_i$ risulterà una funzione lineare ed omogenea delle p quantità $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_p$ con coefficienti razionali. Varranno dunque p equazioni della forma

$$\begin{aligned}
\omega\omega_1 &= k_{11}\omega_1 + k_{12}\omega_2 + \ldots + k_{1p}\omega_p, \\
\omega\omega_2 &= k_{21}\omega_1 + k_{22}\omega_2 + \ldots + k_{2p}\omega_p, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\omega\omega_p &= k_{p_1}\omega_1 + k_{p_2}\omega_2 + \ldots + k_{pp}\omega_p,
\end{aligned}$$

in cui i coefficienti k_{rs} sono tutti numeri razionali. Ora queste equazioni possono scriversi nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
&(k_{11} - \omega)\,\omega_1 + k_{12}\,\omega_2 + \ldots + k_{1p}\,\omega_p = o,\\
&k_{21}\,\omega_1 + (k_{22} - \omega)\,\omega_2 + \ldots + k_{2p}\,\omega_p = o,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&k_{p1}\,\omega_1 + k_{p2}\,\omega_2 + \ldots + (k_{pp} - \omega)\,\omega_p = o.
\end{aligned}$$

Ne segue che, non potendo essere le quantità $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_p$ tutte nulle, il numero ω dovrà esser radice dell' equazione

$$\begin{vmatrix}
k_{11} - \omega & k_{12} & \ldots & k_{1p}\\
k_{21} & k_{2.} - \omega & \ldots & k_{2p}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
k_{p1} & k_{p2} & \ldots & k_{pp} - \omega
\end{vmatrix} = o;$$

e questa è un' equazione algebrica di grado p in ω, a coefficienti razionali, che, moltiplicata per un conveniente numero intero, potrà esser ridotta a coefficienti interi. Così il teorema enunciato resta stabilito.

Un altro teorema, del quale faremo spesso uso, è il seguente: *Se α, β, ... λ sono numeri algebrici, ogni numero, formato con essi mediante operazioni razionali, è ancora algebrico.*

Basterà dimostrare che, se α, β sono numeri algebrici, anche le espressioni $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, $\alpha \cdot \beta$, $\frac{\alpha}{\beta}$ sono numeri algebrici.

Principiamo ad osservare che dalla definizione di nnmero algebrico discende immediatamente che, se α è un numero algebrico, anche $-\alpha$, $\frac{1}{\alpha}$, $\alpha + 1$, $\alpha - 1$ saranno numeri algebrici.

Applicando ora il teorema, dimostrato precedentemente, all' equazione lineare

$$\beta x + \alpha = o$$

a coefficienti α, β algebrici, avremo che $-\frac{\alpha}{\beta}$ e quindi anche $\frac{\alpha}{\beta}$ sarà algebrico; poi se β è algebrico, sarà tale anche $\frac{1}{\beta}$, e quindi anche $\alpha : \frac{1}{\beta} = \alpha \cdot \beta$. Così pure saranno algebrici $\frac{\alpha}{\beta} + 1$, $\frac{\alpha}{\beta} - 1$, e perciò anche

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right) \cdot \beta = \alpha + \beta, \quad \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) \cdot \beta = \alpha - \beta;$$

così il teorema resta dimostrato; esso poteva stabilirsi anche indipendentemente dal teorema precedente (1).

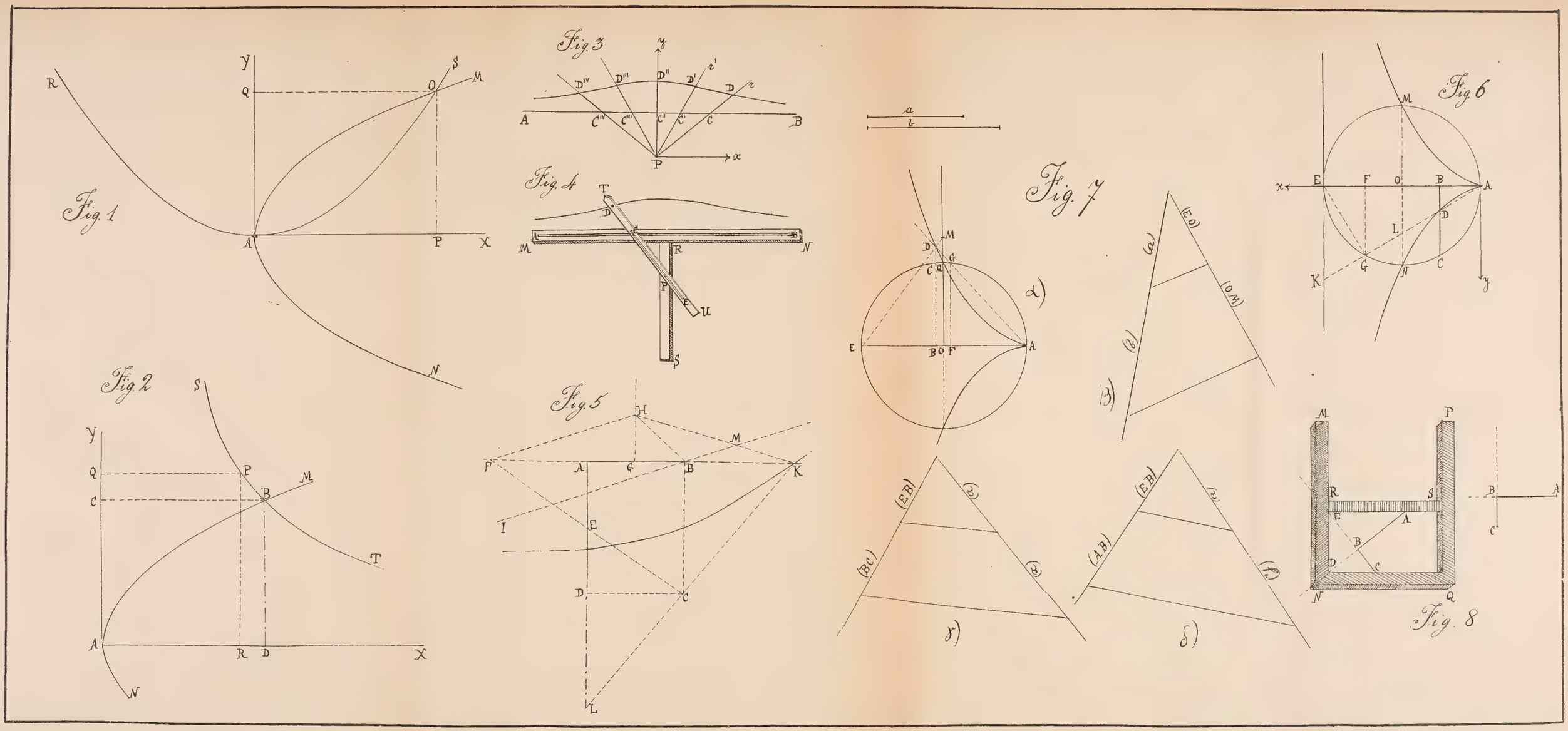
§ 3. **Dimostrazione dell' esistenza di numeri trascendenti.** -- Nel presente paragrafo ci occuperemo della prima delle questioni poste nel § 1, se, cioè, esistono dei numeri che non siano radici di alcuna equazione algebrica a coefficienti razionali. Di tali numeri, detti *trascendenti*, il primo a dimostrare l'esistenza è stato il Liouville. La dimostrazione del Liouville comparve per la prima volta in forma succinta nei *Comptes rendus* del 1844, vol. 18, pag. 883 e 910, e poi più diffusamente nel *Giornale di Liouville,* vol. 16, (1851), col titolo seguente: *Sur des classes très-étendues de quantités dont la valeur n' est ni algébrique ni même réductible à des irrationelles algébriques.*

Esporremo ora la dimostrazione del Liouville attenendoci al libro del Bachmann in cui essa si trova riprodotta (2).

---

(1) Cfr. Bachmann, *Op. cit.*, pag. 18-21. I due teoremi dimostrati son dovuti al Dedekind: cfr. l'ultima appendice alle *Lezioni sulla teoria dei numeri* di Lejeune Dirichlet. Trad. italiana del Faifofer, pag. 443-446.

(2) Cfr. Bachmann, *Op. cit.*, pag. 49 e segg.



Tav. I

Fig. 9.

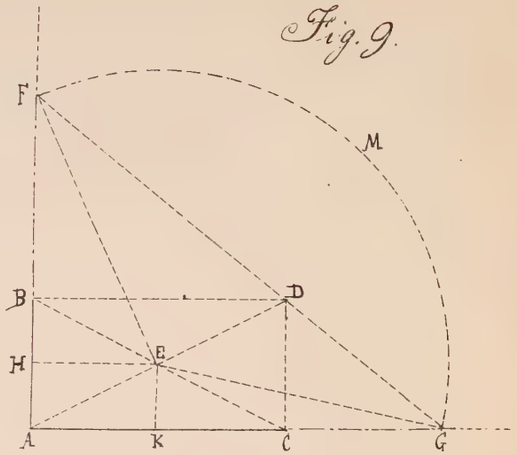


Fig. 12

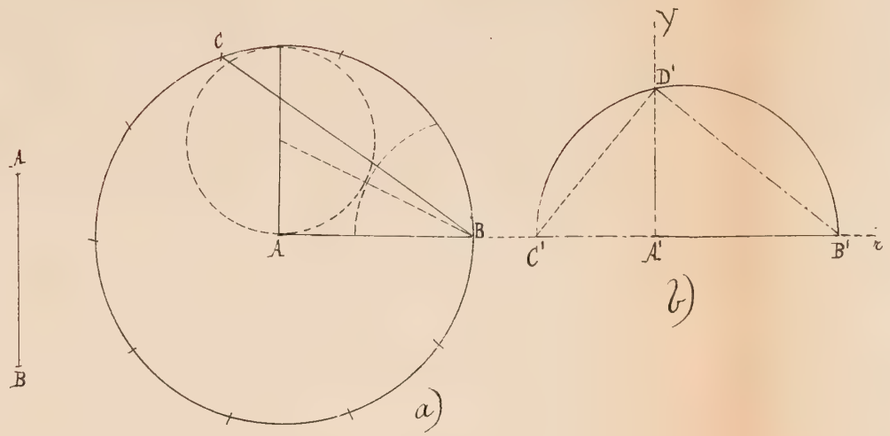


Fig. 15

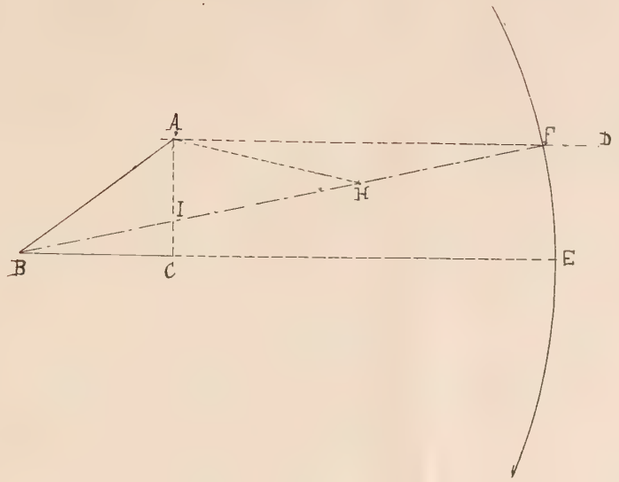


Fig. 10

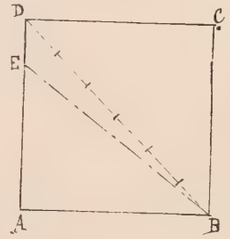


Fig. 11

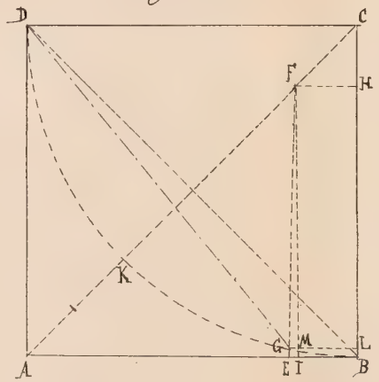


Fig. 13

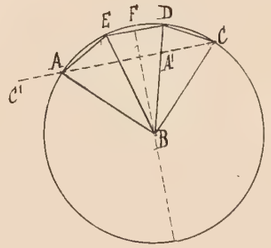


Fig. 14

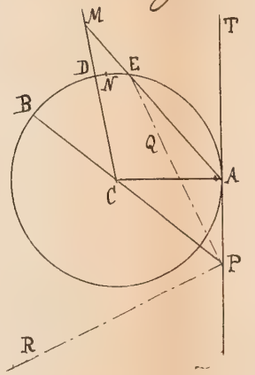
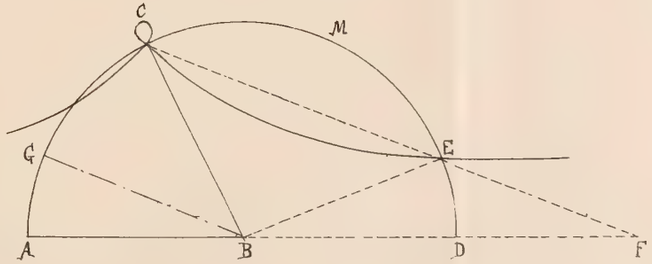


Fig. 16



Tav. II

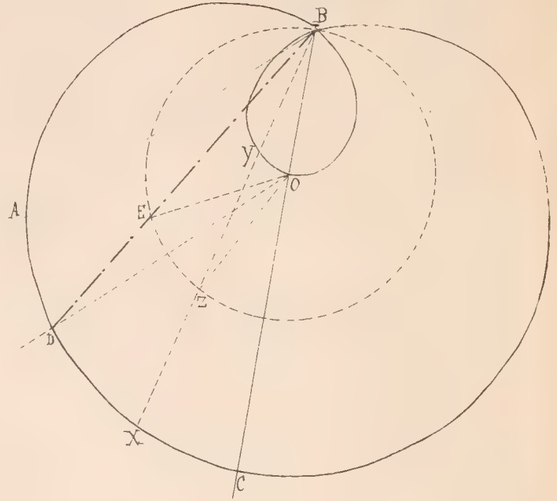


Fig. 17
B
A
E
Y
O
E
D
X
C

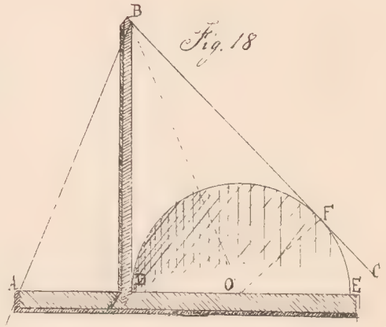


Fig. 18
B
F
A
D
O
E
C

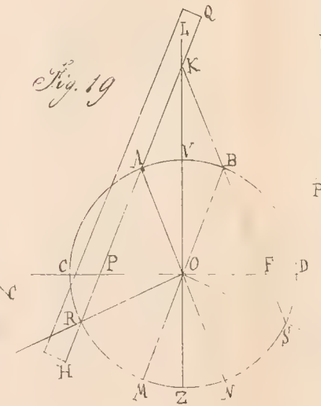


Fig. 19
Q
L
K
A
V
B
C
P
O
F
D
R
S
H
M
Z
N

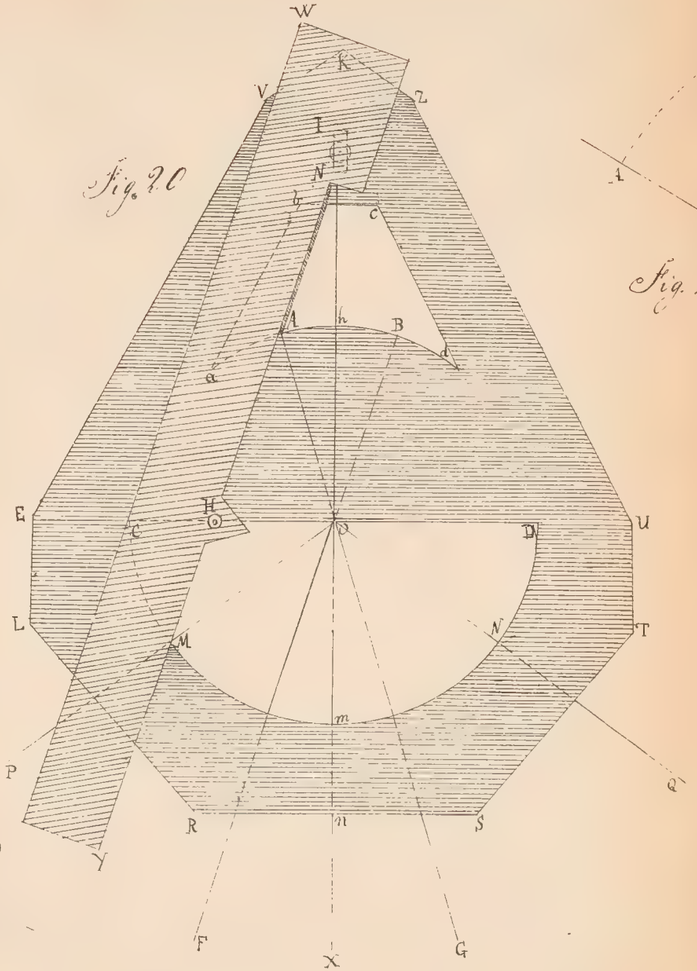


Fig. 20
W
V
K
Z
I
N
b
c
A
h
B
d
a
E
C
H
O
D
U
L
M
N
T
P
Q
Y
R
n
S
F
X
G

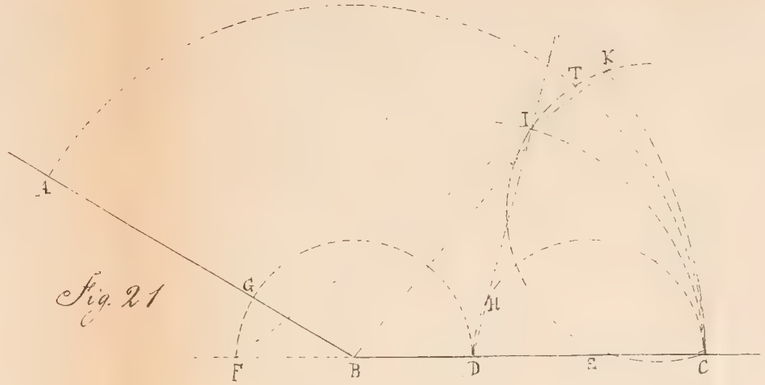


Fig. 21
T
K
I
A
G
H
F
B
D
E
C

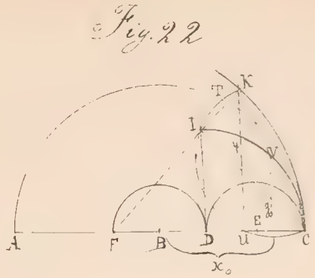


Fig. 22
T
K
L
V
A
F
B
D
U
E
C
x

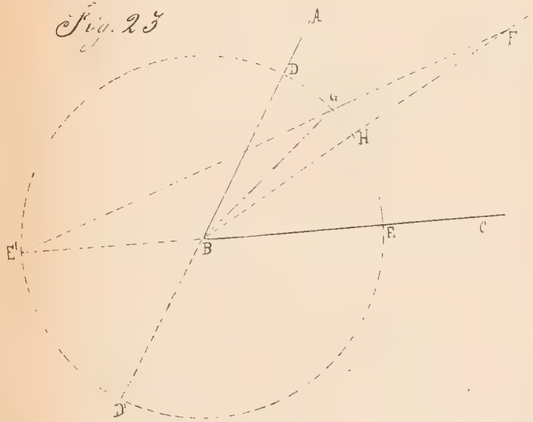


Fig. 23
A
F
D
G
H
E
B
E
C
D

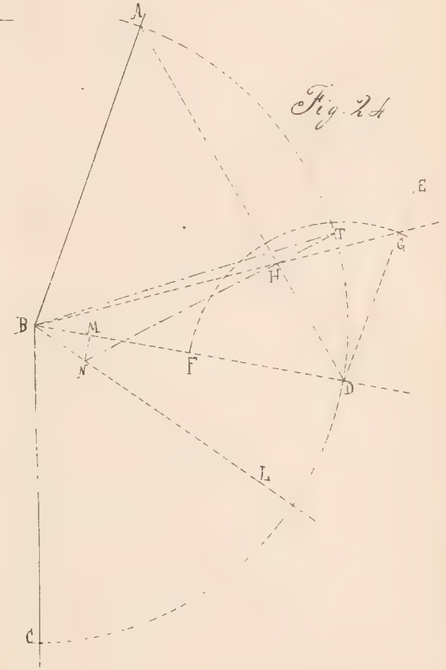


Fig. 24
A
E
T
G
H
B
M
N
F
D
L
C

Tav. III

Principiamo dallo stabilire un carattere numerico che ogni numero algebrico reale e positivo presenta, quando sia sviluppato in frazione continua. Sia x_o un numero algebrico qualunque, cioè radice di un' equazione della forma

$$(1) \quad f(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = o$$

a coefficienti interi (v. § 2). Senza alterare la generalità, potremo supporre che le radici di questa equazione sian tutte diseguali; ed infatti, se essa avesse delle radici fra loro uguali, dividendo il suo primo membro per il massimo comun divisore ch' esso ha colla sua derivata prima, potremmo far sì che la nostra ipotesi fosse realizzata.

Supponiamo che il numero x_o sia reale e positivo e sia sviluppato in frazione continua nel modo seguente:

$$x_o = p_o + \cfrac{1}{p_1 + \cfrac{1}{p_2 + \ddots + \cfrac{1}{p_{k-1} + \ddots}}},$$

ove $p_o, p_1, p_2, \ldots p_{k-1}, \ldots$ rappresentano numeri interi e positivi; e sia r_k il resto dello sviluppo stesso, quando si arresti al denominatore p_{k-1}; sarà r_k ancora un numero algebrico (v. § 2) reale e positivo e sarà p_k il massimo numero intero contenuto in $\frac{1}{r_k}$.

Se indichiamo in generale con

$$\frac{c_s}{c'_s} \quad (s = 1, 2, 3, \ldots)$$

la ridotta che si ottiene limitando la frazione continua al denominatore p_{k-1}, avremo, per la nota legge di formazione delle ridotte,

$$\frac{c_k}{c'_k} = \frac{c_{k-1}\, p_{k-1} + c_{k-2}}{c'_{k-1}\, p_{k-1} + c'_{k-2}},$$

e se in questa espressione, in luogo di p_{k-1}, poniamo $p_{k-1} + r_k$, avremo

$$x_o = \frac{c_k + r_k c_{k-1}}{c'_k + r_k c'_{k-1}} .$$

Ciò posto, abbiamo

$$\frac{c_k}{c'_k} - x_o = \frac{c_k}{c'_k} - \frac{c_k + r_k c_{k-1}}{c'_k + r_k c'_{k-1}} = \frac{r_k (c_k c'_{k-1} - c'_k c_{k-1})}{c'_k (c'_k + r_k c'_{k-1})},$$

ossia

$$(2) \qquad \frac{c_k}{c'_k} - x_o = \frac{(-1)^k r_k}{c'_k (c'_k + r_k c'_{k-1})} .$$

D' altra parte, se x_1, $x_2, \ldots x_{n-1}$ sono le altre $n-1$ radici dell' equazione (1), che per ipotesi son tutte diverse fra loro e da x_o, potremo scrivere

$$f(x) = a_o (x - x_o)(x - x_1) \ldots\ldots (x - x_{n-1}).$$

Se in questa espressione per x poniamo $\frac{c_k}{c'_k}$ avremo

$$f\left(\frac{c_k}{c'_k}\right) = a_o \left(\frac{c_k}{c'_k} - x_0\right)\left(\frac{c_k}{c'_k} - x_1\right) \ldots \left(\frac{c_k}{c'_k} - x_{n-1}\right) =$$

$$= \frac{a_o c_k^n + a_1 c_k^{n-1} c_k + \ldots + a_{n-1} c_k c'^{n-1}_k + a_n c'^n_k}{c'^n_k}$$

Ma le quantità a, c, c' sono tutte numeri interi, quindi potremo scrivere

$$a_o \left(\frac{c_k}{c'_k} - x_o\right)\left(\frac{c_k}{c'_k} - x_1\right) \ldots \left(\frac{c_k}{c'_k} - x_{n-1}\right) = \frac{C}{c'^n_k};$$

essendo C un numero intero.

Ora, col crescere indefinito di k, la quantità $\frac{c_k}{c'_k}$ tende al limite x_o; dunque da un certo valore di k in poi sarà sempre $\frac{c_k}{c'_k}$ diversa da x_o, $x_1, \ldots x_{n-1}$ e minore

in valore assoluto di una certa quantità positiva finita; perciò da un certo valore di k in poi sarà il numero intero C diverso da zero e quindi in valore assoluto maggiore o eguale ad 1, e sarà l' espressione

$$a_o \left(\frac{c_k}{c'_k} - x_1\right) \cdots \left(\frac{c_k}{c'_k} - x_{n-1}\right)$$

minore in valore assoluto di una certa quantità positiva finita l; sarà dunque in valore assoluto

$$\left(\frac{c_k}{c'_k} - x_o\right) l > \frac{1}{c'^n_k},$$

ossia

$$\frac{c_k}{c'_k} - x_o > \frac{1}{l c'^n_k}$$

in valore assoluto. Ed ora, tenendo conto della (2), avremo,

$$\frac{r_k}{c'_k (c'_k + r_k c'_{k-1})} > \frac{1}{l c'^n_k},$$

ossia

$$\frac{c'_k + r_k c'_{k-1}}{r_k} < l c'^{\,n-1}_k;$$

e, poichè c'_k, c'_{k-1} sono quantità positive,

$$\frac{1}{r_k} < l c'^{\,n-2}_k;$$

ed essendo p_k il massimo numero intero contenuto in $\frac{1}{r_k}$, avremo infine

(3) $$p_k < l c'^{\,n-2}_k.$$

Questa diseguaglianza rappresenta il carattere aritmetico che volevamo stabilire riguardo al numero algebrico x_o; esso si può enunciare così:

Se si sviluppa in frazione continua una radice reale e positiva di un' equazione algebrica di grado n a coefficienti interi ed a radici diseguali, ogni denominatore parziale di questa frazione continua, non supera il prodotto di una certa quantità costante l, positiva e finita, per la potenza $(n-2)^{esima}$ del denominatore della ridotta precedente.

Ciò premesso, se riusciremo a costruire una frazione continua della forma

$$p_0 + \frac{1}{p_1 + \frac{1}{p_2 + \ldots}},$$

a denominatori parziali interi e positivi, per cui la condizione (3), da un certo valore di k in poi, non sia soddisfatta, qualunque sia il valore della costante l e del numero intero n, il numero rappresentato da questa frazione continua non potrà esser radice di alcuna equazione a coefficienti interi ed a radici diseguali, e quindi neppure potrà esser radice di alcuna equazione algebrica a coefficienti razionali (v. § 2); sarà dunque un numero trascendente.

Ora una frazione continua di tal natura si può nel fatto costruire; basta, p. es., formare ogni denominatore parziale p_k in modo che stia coi precedenti in questa relazione

$$p_k = c'^{\,k}_{k} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ed infatti, qualunque sia il valore che hanno n ed l, il numero k, crescendo, finirà per superare n; ma, crescendo k, il numero c'_k aumenta indefinitamente; dunque possiamo asserire che, da un certo valore di k in poi, sarà

$$k > n \qquad c'^{\,2}_{k} > l;$$

per la prima di queste diseguaglianze sarà

$$p_k > c'^{\,2}_{k} \cdot c'^{\,n-2}_{k};$$

e per la seconda avremo, *a fortiori*

$$p_k > l \, . \, c'^{\,n-2}_{\,k} .$$

Dunque, poichè, qualunque sieno i valori di l e di n, si può trovare un valore di k tale che da quel valore in poi la diseguaglianza (3) non è mai soddisfatta, il numero rappresentato dalla frazione continua così costruita sarà un numero trascendente.

Si noti che alla stessa conclusione si giungerebbe se si prendesse

$$p_k > c'^{\,k}_{\,k} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots);$$

da questa arbitrarietà risulta la possibilità di costruire infiniti numeri trascendenti; e così il teorema di Liouville resta dimostrato.

In seguito alle ricerche del Cantor [1] si può completare il risultato stabilito dal Liouville dicendo che non solo esistono infiniti numeri trascendenti, ma che *la totalità dei numeri trascendenti è molto più vasta della totalità dei numeri algebrici.* Questa espressione acquista un significato chiaro e preciso in seguito al criterio stabilito dal Cantor per paragonare l' ampiezza di due classi infinite di enti [2]. Il criterio è il seguente: *Due classi, comprendenti ciascuna infiniti elementi, si dicono della stessa potenza* (ugualmente comprensive) *quando si possono porre tra loro in corrispondenza biunivoca.*

Una classe comprendente infiniti elementi è chiamata dal Cantor *numerabile* se ha la stessa potenza di quella dei numeri interi positivi.

---

(1) Giorgio Cantor: *Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen* (Giorn. di Crelle, vol. 77, 1873).

(2) Negli *Acta mathematica*, vol. II, IV, V.

Ora è stato dimostrato dal CANTOR che *la varietà costituita dai numeri algebrici reali è appunto una classe numerabile* (1).

Di due classi, comprendenti ciascuna infiniti elementi, si dice che la prima ha maggior potenza della seconda (la prima è più comprensiva della seconda), *se le due classi non si possono porre tra loro in corrispondenza biunivoca, ma un gruppo di elementi contenuto nella prima si può porre in corrispondenza biunivoca con la seconda.*

Così la potenza per un gruppo infinito di enti è ciò che per un gruppo finito di elementi è il loro numero. Stabiliti questi concetti, il CANTOR si propose di ordinare tutti i gruppi di elementi, secondo la loro potenza crescente. Perciò assegnò ad un gruppo di un numero finito di enti la potenza *zero*, e ad un gruppo numerabile la potenza *uno*. Dimostrò poi che il continuo dei valori numerici che vien rappresentato dai punti di un segmento arbitrariamente piccolo dell' asse delle ascisse ha maggior potenza di un aggregato numerabile; con questo non solo restava dimostrata l' esistenza d' infiniti numeri trascendenti, ma anche risultava che il loro insieme è molto più vasto dell' insieme dei numeri algebrici.

§ 4. **Il lemma di Weierstrass.** — Dobbiamo ora prendere in considerazione l' altra domanda posta nel § 1, dalla quale abbiamo visto dipendere la questione della possibilità di risolvere elementarmente il problema della quadratura del cerchio; si tratta, cioè, di decidere se il numero π debba porsi tra i numeri algebrici o tra i numeri trascendenti. Tale questione è stata risoluta nel 1882 dal LINDEMANN (2), il quale, prendendo le mosse dalle

---

(1) Cfr. KLEIN: *Conferenze sopra alcune questioni di geometria elementare.* Trad. da F. Giudice. Torino, 1896, pagg. 41-46.

(2) *Über die Ludolph' sche Zahl.* Berichte der Berliner Akademie der W.

ricerche con cui HERMITE [1] (1873) aveva stabilita la trascendenza del numero e (base dei logaritmi naturali), riuscì a dimostrare che anche il numero π è trascendente.

La dimostrazione del LINDEMANN fu poi notevolmente semplicizzata dal WEIERSTRASS [2], ed estesa a dimostrare un teorema più generale già enunciato dal LINDEMANN. Da questo teorema generale discende non solo la trascendenza dei numeri e e π, ma anche, come il WEIERSTRASS ha rilevato, la trascendenza di ogni arco circolare la cui corda sia espressa algebricamente mediante il raggio, restando così risoluta la questione della possibilità di effettuare elementarmente la rettificazione del cerchio o di un arco circolare qualunque.

Principiamo dallo stabilire un lemma, dal quale il WEIERSTRASS mosse per dimostrare la trascendenza di π ed il teorema generale di LINDEMANN [3].

Siano $f(z)$, $h(z)$ due polinomii nella variabile z, di gradi respettivamente $n+1$ ed n:

$$(1) \qquad \begin{cases} f(z) = a_0 z^{n+1} + a_1 z^n + \ldots + a_n z + a_{n+1}, \\ h(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0; \end{cases}$$

il polinomio $f(z)$ sia scelto in modo che l'equazione $f(z) = 0$ abbia tutte le sue radici diseguali, mentre i coefficienti di $h(z)$ sono del tutto arbitrarii.

Formiamo con questi due polinomii la funzione

$$(2) \qquad F(z) = \frac{h(z) f(z)^m}{m!}, \quad (m \text{ intero positivo})$$

---

(1) *Sur la fonction exponentielle.* (Comptes rendus, vol. 77).

(2) Zu LINDEMANNS Abhandlung: *Über die Ludolph'sche Zahl.* Berliner Berichte, 1885.

(3) Cfr. BACHMANN. *Op. cit.*, pag. 111 e segg.

che sarà di grado $\mu = n + m(n+1)$; e consideriamo la funzione

$$(3) \qquad \varphi(z) = F(z) + F'(z) + F''(z) + \ldots + F^{(\mu)}(z),$$

ove gli apici indicano le derivate successive di $F(z)$.

La funzione $\varphi(z)$ sarà dello stesso grado che $F(z)$, cioè di grado $\mu = n + m(n+1)$; inoltre, derivando ambo i membri della (3) rispetto a z e tenendo presente che $F^{(\mu+1)}(z) = o$, abbiamo

$$\varphi'(z) = F'(z) + F''(z) + F'''(z) + \ldots + F^{(\mu)}(z).$$

Sottraendo membro a membro questa relazione dalla precedente, risulterà

$$\varphi(z) - \varphi'(z) = F(z)$$

e per la (2)

$$(4) \qquad \varphi(z) - \varphi'(z) = \frac{h(z)\, f(z)^m}{m!}.$$

Supponiamo ora che i coefficienti c_i di $h(z)$ non siano tutti nulli, cioè che $h(z)$ non sia identicamente nulla; ne seguirà che anche $\varphi(z)$ non potrà essere identicamente nulla. Neppure potrà $\varphi(z)$ ammettere $f(z)$ come fattore; altrimenti potremmo porre

$$\varphi(z) = \theta(z) \,.\, f(z)^\rho,$$

ove $\theta(z)$ indica un polinomio in z non divisibile per $f(z)$ e $\rho < m+1$. Ora ciò è impossibile, perchè l' equazione (4) assumerebbe la forma

$$\{\theta(z) - \theta'(z)\}\, f(z)^\rho - \rho\theta(z) \,.\, f(z)^{\rho-1} \,.\, f'(z) = \frac{h(z)\, f(z)^m}{m!},$$

ossia

$$\{\theta(z) - \theta'(z)\}\, f(z) - \rho \,.\, \theta(z) \,.\, f'(z) = \frac{h(z)\, f(z)^{m-\rho+1}}{m!};$$

ed il termiue $\rho \,.\, \theta(z) \,.\, f'(z)$ dovrebbe esser divisibile per

$f(z)$; ma $\theta(z)$ si è supposta non divisibile per $f(z)$, ed $f'(z)$ non può avere alcun fattore comune con $f(z)$, perchè l' equazione $f(z) = o$ ha per ipotesi radici tutte diseguali. Dunque $\rho \,.\, \theta(z) \,.\, f'(z)$ non può esser divisibile per $f(z)$ e neppure $\varphi(z)$ sarà divisibile per $f(z)$.

Ora osserviamo che derivando $F(z)$ successivamente rispetto a z, la prima derivata non divisibile per $f(z)$ sarà la m^{esima}, la quale conterrà termini divisibili per $f(z)$ e l' unico termine $h(z)\, f'(z)^m$ non divisibile per $f(z)$. Questo termine è una funzione razionale intera in

$$z,\ a_o,\ a_1,\ \ldots\ a_{n+1},\ c_o,\ c_1,\ \ldots\ c_n,$$

a coefficienti interi, lineare ed omogenea rispetto alle quantità c e di grado $(m+1)n$ in z. Analogamente in tutte le derivate successive di $F(z)$, fino alla μ^{esima}, i termini non divisibili per $f(z)$ saranno funzioni razionali intere in

$$z,\ a_o,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_{n+1},\ c_o,\ c_1,\ \ldots\ c_n,$$

a coefficienti interi, lineari ed omogenee rispetto alle quantità c e di grado non superiore ad $(m+1)n$ rispetto a z. Dunque, se nell' espressione di $\varphi(z)$, data dalla (3), raccogliamo in uno tutti i termini contenenti il fattore $f(z)$, potremo scrivere

$$\varphi(z) = K(z) \,.\, f(z) + H(z), \tag{5}$$

ove $K(z)$ è un polinomio in z, ed $H(z)$ una funzione razionale intera di

$$z,\ a_o,\ a_1,\ \ldots\ a_{n+1},\ c_o,\ c_1,\ \ldots\ c_n,$$

a coefficienti interi, lineare ed omogenea rispetto alle quantità c e di grado $(m+1)n$ in z; e non potrà $H(z)$ essere identicamente nulla, perchè $\varphi(z)$ non è divisibile per $f(z)$.

Moltiplichiamo ora $H(z)$ per a_o^{mn} e poi dividiamo per $f(z)$, proseguendo la divisione algebrica finchè è possi-

bile; otterremo per quoziente un polinomio in z e per resto una funzione $g(z)$ razionale intera in

$$z,\ a_o,\ a_1, \ldots a_{n+1},\ c_o,\ c_1, \ldots c_n,$$

a coefficienti interi, lineare ed omogenea nelle quantità c e di grado non superiore ad n rispetto a z; per modo che la relazione (5) si potrà scrivere nella forma seguente

$$(6) \qquad a_o^{mn}\,\varphi(z) = G(z)\,.\,f(z) + g(z),$$

essendo $G(z)$ un polinomio in z, mentre $g(z)$ ha le proprietà già dette e di più non può essere identicamente nulla, come non lo era $H(z)$.

Infine, poichè $g(z)$ è lineare ed omogenea rispetto alle quantità $c_o, c_1, \ldots c_n$, potremo rappresentarla come una somma di $n+1$ termini nel modo seguente

$$g(z) = \sum_{i=o}^{n} c_i\, g_i(z),$$

ove le $n+1$ funzioni $g_i(z)$ saranno funzioni razionali intere di z, a_o, $a_1, \ldots a_{n+1}$, a coefficienti interi e di grado non superiore ad n rispetto a z; ed avremo per la (6)

$$(7) \qquad a_o^{mn}\,\varphi(z) = G(z)\,.\,f(z) + \sum_{i=o}^{n} c_i\, g_i(z).$$

Ciò premesso, consideriamo l' integrale indefinito

$$\int e^{-z} F(z) dz;$$

applicando successivamente $\mu+1$ volte l' integrazione per parti e ricordando che $F^{(\mu+1)}(z) = o$, avremo

$$\int e^{-z} F(z) dz = -\, e^{-z}\,(F(z) + F'(z) + \ldots + F^{(\mu)}(z)),$$

e per la (3)

$$\int e^{-z} F(z) dz = -\, e^{-z}\,\varphi(z).$$

Moltiplicando ambo i membri di questa eguaglianza per a_o^{mn} e tenendo presente la (2) e la (7), abbiamo

$$\int \frac{(a_o^n f(z))^m}{m!} h(z) e^{-z} dz = - e^{-z} G(z) . f(z) - e^{-z} \sum_{i=o}^{n} c_i g_i(z).$$

Siano ora z', z'' due radici dell' equazione $f(z) = o$, che, per ipotesi, ha tutte radici diseguali. Integrando nell' ultima formola lungo un cammino qualunque, nel piano della variabile complessa z, fra i due punti di indici z', z'', e tenendo presente che

$$f(z') = f(z'') = o,$$

avremo

$$e^{-z''} \sum_{i=o}^{n} c_i g_i(z'') - e^{-z'} \sum_{i=o}^{n} c_i g_i(z') =$$

$$= - \int_{z'}^{z''} \frac{(a_o^n f(z))^m}{m!} h(z) e^{-z} dz.$$

Ora ricordando che

$$h(z) = \sum_{i=o}^{n} c_i z^i,$$

la precedente relazione risulta lineare ed omogenea rispetto alle c_i e quindi, poichè queste sono arbitrarie, si scinderà nelle $n + 1$ equazioni seguenti

$$(8) \quad e^{-z''} g_i(z'') - e^{-z'} g_i(z') = - \int_{z'}^{z''} \frac{(a_o^n f(z))^m}{m!} z^i e^{-z} dz$$

$$(i = o, 1, 2, \ldots n).$$

Il numero m fin' ora è rimasto indeterminato, e le funzioni $g_i(z)$, sebbene non lo abbiamo esplicitamente indicato, dipendono pure da esso.

Ora mostriamo che, crescendo m indefinitamente, il modulo degli integrali che compariscono nel secondo

membro delle equazioni precedenti tende al limite zero. Ed infatti, lungo il cammino d' integrazione, la cui lunghezza indicheremo con l, sia M il massimo modulo di $z^i e^{-z}$ ed M' il massimo modulo di $a_0{}^n f(z)$. Il modulo dell' integrale rimarrà sempre minore di $\frac{M \,.\, M'^m}{m!} \,.\, l$; ma, col crescere indefinito di m, la quantitá $\frac{M'^m}{m!}$ tende al limite zero, mentre M ed l rimangono costanti; dunque anche il modulo dell' integrale tenderà al limite zero, e lo stesso accadrà dei primi membri delle equazioni (8), quand' anche si moltiplichino per $e^{z'+z''}$.

Concludendo possiamo dire che al crescere indefinito di m le espressioni

$$e^{z'} \,.\, g_i(z'') - e^{z''} \,.\, g_i(z') \quad (i = 0, 1, 2, \ldots n)$$

tendono al limite zero.

Perciò si può supporre di aver scelto il numero m tanto grande che i moduli di tutte le espressioni precedenti siano minori di un numero positivo δ scelto piccolo a piacere.

Se ora indichiamo con z_0, $z_1, \ldots z_n$ tutte le radici dell' equazione $f(z) = o$, che per ipotesi son fra loro diseguali, e supponiamo che i coefficienti dell' equazione stessa sian tutti numeri interi, ne seguirà che anche le $n + 1$ funzioni $g_i(z)$ risulteranno funzioni razionali intere di z a coefficienti interi; e, per ciò che precede, si potrà scegliere per m un valore così grande che i moduli delle espressioni

$$e^{z_k} \,.\, g_i(z_0) - e^{z_0} \,.\, g_i(z_k) \quad \begin{pmatrix} i = 0, 1, 2, \ldots n \\ k = 0, 1, 2, \ldots n \end{pmatrix}$$

risultino tutti inferiori ad un numero positivo σ, scelto piccolo a piacere.

Mostriamo ora che le $n+1$ funzioni $g_o(z), g_1(z), \ldots g_n(z)$, oltre alle proprietà già stabilite, godono anche della seguente: il determinante

$$\Gamma = \begin{vmatrix} g_o(z_o) & g_1(z_o) \ldots g_n(z_o) \\ g_o(z_1) & g_1(z_1) \ldots g_n(z_1) \\ \ldots & \ldots \\ g_o(z_n) & g_1(z_n) \ldots g_n(z_n) \end{vmatrix}$$

è diverso da zero.

Ed infatti, se fosse eguale a zero, sussisterebbero le $n+1$ relazioni

$$\sum_{i=o}^{n} c_i g_i(z_k) = o \quad (k = o, 1, 2, \ldots n)$$

per valori non tutti nulli delle quantità $c_o, c_1, \ldots c_n$; quindi la funzione

$$g(z) = \sum_{i=o}^{n} c_i g_i(z),$$

il cui grado in z non supera n, dovrebbe annullarsi per $n+1$ valori di z e perciò dovrebbe essere identicamente nulla, mentre, per quanto abbiamo sopra dimostrato, ciò non può essere.

Riassumendo quanto abbiamo stabilito in questo paragrafo, si può enunciare il *Lemma di* Weierstrass nel modo seguente:

Se $f(z)$ è una funzione razionale intera di z di grado $n+1$, a coefficienti interi ed a radici $z_o, z_1, z_2 \ldots z_n$ tutte diseguali, si può costruire un sistema di $n+1$ funzioni

$$g_o(z), \; g_1(z), \ldots g_n(z)$$

razionali intere in z, di grado non superiore ad n ed a coefficienti interi, tali che il determinante delle quantità $g_i(z_k)$ sia diverso da zero, ed ognuna delle differenze

$$e^{z_k} \cdot g_i(z_o) - e^{z_o} \cdot g_i(z_k) \quad \begin{pmatrix} i = o, 1, 2, \ldots n \\ k = o, 1, 2, \ldots n \end{pmatrix}$$

abbia un modulo inferiore ad un numero positivo o scelto piccolo a piacere.

§ 5. **Dimostrazione del teorema generale di Lindemann.** — Appoggiandosi sul lemma del § precedente, il Weierstrass ha dato la dimostrazione del teorema generale di Lindemann, che ora esporremo attenendoci alla Memoria originale già citata.

Principieremo dallo stabilire il seguente teorema, dal quale poi, per via di successiva estensione, arriveremo facilmente a stabilire il teorema generale di Lindemann.

A) *Se* $x_1, x_2, \ldots x_r$ *sono le* r *radici di un' equazione algebrica*

$$x^r + c_1 x^{r-1} + \ldots + c_r = o, \tag{1}$$

di grado r *a coefficienti razionali ed a radici tutte diseguali, e se* $N_1, N_2, \ldots N_r$ *sono* r *numeri interi, dei quali uno almeno diverso da zero, la somma* $\sum_{i=1}^{r} N_i e^{x_i}$ *è diversa da zero.*

Supponiamo ordinati i numeri $x_1, x_2, \ldots x_r$ in modo che la parte reale di uno qualunque di essi non superi la parte reale dei precedenti; in tal modo potrà darsi che nella serie dei numeri $x_1, x_2, \ldots x_r$ si presenti un gruppo di numeri successivi aventi parti reali uguali; supporremo allora ordinati i numeri del gruppo stesso in modo che i coefficienti della parte immaginaria vadano decrescendo.

Con queste ipotesi, le differenze $x_1 - x_2$, $x_1 - x_3, \ldots$ $x_{r-1} - x_r$, che si ottengono togliendo da uno qualunque dei numeri stessi uno qualunque dei successivi, avranno per parte reale un numero positivo, oppure avranno la parte reale nulla e positivo il coefficiente della parte immaginaria.

Ne segue che se $a, b, \ldots l$ sono dei numeri comunque scelti fra gli r numeri $1, 2, \ldots r$ e se $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ sono altrettanti numeri scelti pure fra $1, 2, \ldots r$, ma tali che sia

$$a \geq \alpha, \quad b \geq \beta, \ldots \quad l \geq \lambda,$$

la quantità

$$(x_a + x_b + \ldots + x_l) - (x_\alpha + x_\beta + \ldots + x_\lambda) =$$
$$= (x_a - x_\alpha) + (x_b - x_\beta) + \ldots + (x_l - x_\lambda)$$

non potrà esser nulla; cioè $x_a + x_b + \ldots + x_l$ non potrà essere uguale ad $x_\alpha + x_\beta + \ldots + x_\lambda$.

Ciò premesso, indichiamo con X' la somma

$$\sum_{i=1}^{r} N_i e^{x_i}$$

e con $X'', X''', \ldots X^{(k)}$ tutte le altre somme che resultano da quella permutando i numeri $N_1, N_2, \ldots N_r$ in tutti i modi possibili.

Sarà $k = r!$, ed una qualunque $X^{(s)}$ potrà scriversi nel modo seguente

$$X^{(s)} = \sum_{i=1}^{r} N_i^{(s)} e^{x_i} \quad (s = 1, 2, \ldots k),$$

ove $N_1^{(s)}, N_2^{(s)}, \ldots N_r^{(s)}$ rappresenta una delle k permutazioni degli r numeri $N_1, N_2, \ldots N_r$.

Costruiamo ora il prodotto

$$P = X' \,.\, X'' \ldots X^{(k)};$$

se dimostriamo ch' esso è diverso da zero, anche la somma $X' = \sum_{i=1}^{r} N_i e^{x_i}$, che ne è un fattore, dovrà esser diversa da zero e così resulterà dimostrato il teorema A).

Possiamo scrivere

$$P = \sum_{a=1}^{r} N'_a e^{x_a} \,.\, \sum_{b=1}^{r} N_b'' \; e^{x_b} \ldots \sum_{l=1}^{r} N_l^{(k)} \; e^{x_l},$$

ossia, più brevemente,

$$(2) \qquad P = \sum_{a,\, b, \ldots l} N'_a N''_b \ldots N_l^{(k)} e^{x_a + x_b + \ldots + x_l}$$

$$(a, b, \ldots l = 1, 2, \ldots r).$$

Fra tutti i valori che può assumere la somma

$$x_a + x_b + \ldots x_l,$$

per tutti i possibili sistemi di valori degli indici, i valori diversi fra loro siano in numero di $n + 1$ e indichiamoli con $z_0, z_1, \ldots z_n$; potremo allora scrivere più semplicemente

$$(3) \qquad P = \sum_{\mu = 0}^{n} C_\mu e^{z_\mu},$$

ove, per ogni valore di μ, è

$$(4) \qquad C_\mu = \sum_{a, b, \ldots l}' N'_a N''_b \ldots N_l^{(k)},$$

essendo la somma estesa a tutti quei sistemi di valori di $a, b, \ldots l$, per cui $x_a + x_b + \ldots + x_l = z_\mu$.

Ora è facile vedere che delle $n + 1$ quantità C_μ una almeno è diversa da zero; ed infatti, siccome nel gruppo degli r numeri $N_1, N_2, \ldots N_r$ uno almeno è diverso da zero, in ognuna delle k permutazioni

$$\begin{array}{c} N'_1, \; N'_2, \ldots N'_r \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ N_1^{(k)}, \; N_2^{(k)}, \; N_r^{(k)} \end{array}$$

del gruppo stesso vi sarà un primo numero diverso da zero: sia questo N'_α per la prima permutazione, N''_β per la seconda, ... $N_\lambda^{(k)}$ per la k^{esima}; secondo la formola (2), sarà

$$N'_\alpha N''_\beta \ldots N_\lambda^{(k)} e^{x_\alpha + x_\beta + \ldots + x_\lambda}$$

uno dei termini che compongono P.

Se

$$N'_a N''_b \ldots N_l^{(k)} e^{x_a + x_b + \ldots + x_l}$$

è un altro termine qualunque di P, il cui coefficiente sia diverso da zero, sarà

$$a \geq \alpha, \; b \geq \beta, \ldots l \geq \lambda;$$

quindi, per il modo con cui fin da principio abbiamo supposto ordinati i numeri $x_1, x_2, \ldots x_r$, non potrà essere $x_a + x_b + \ldots + x_l$ eguale ad $x_\alpha + x_\beta + \ldots + x_\lambda$. Il coefficiente $N'_\alpha N''_\beta \ldots N_\lambda^{(k)}$ sarà dunque una delle quantità C_μ, fra le quali se ne trova dunque almeno una diversa da zero.

Ciò premesso, si può costruire una funzione $f(z)$, razionale intera in z, di grado $n+1$ a coefficienti interi, che abbia per radici le $n+1$ quantità $z_o, z_1, \ldots z_n$.

Infatti, si consideri il prodotto di tutte le quantità

$$z - (x_a + x_b + \ldots + x_l) \qquad (a, b, \ldots l = 1, 2, \ldots r);$$

esso sarà una funzione razionale intera di z, i cui coefficienti saranno funzioni simmetriche intere a coefficienti interi delle r radici $x_1, x_2, \ldots x_r$ dell' equazione (1); perciò saranno espressi razionalmente per i coefficienti di questa e quindi saranno numeri razionali. Il prodotto considerato resulterà dunque una funzione intera di z a coefficienti razionali; essa poi si annulla solo per $z = z_o$, $z_1, \ldots z_n$, quindi, dividendo questa funzione per il massimo comun divisore ch' essa ha colla sua derivata prima, il quoziente resulterà una funzione intera in z di grado $n+1$, che, moltiplicata per un conveniente numero intero, darà una funzione

$$f(z) = a_o z^{n+1} + a_1 z^n + \ldots + a_{n+1}$$

razionale intera di grado $n+1$ in z, a coefficienti interi, e che si annulla solo per $z = z_o, z_1, \ldots z^n$.

È adesso il momento di applicare il lemma stabilito nel § precedente. Partendo dall'equazione

$$a_o z^{n+1} + a_1 z^n + \dots a_{n+1} = o,$$

colle radici diseguali z_o, $z_1, \dots z_n$, si potrà costruire un sistema di $n+1$ funzioni $g_o(z)$, $g_1(z), \dots g_n(z)$ razionali intere in z di grado non superiore ad n ed a coefficienti interi, tali che il determinante delle quantità $g_i(z_\mu)$ sia diverso da zero ed ognuna delle differenze

$$e^{z_\mu} . g_i(z_o) - e^{z_o} . g_i(z_\mu) \quad \begin{pmatrix} i = o, 1, 2, \dots n \\ \mu = o, 1, 2, \dots n \end{pmatrix}$$

abbia un modulo inferiore ad un numero positivo σ scelto piccolo a piacere, ossia si abbia

$$(5) \quad e^{z_\mu} g_i(z_o) - e^{z_o} g_i(z_\mu) = \varepsilon_{i\mu}\, \sigma \quad \begin{pmatrix} i = o, 1, 2, \dots n \\ \mu = o, 1, 2, \dots n \end{pmatrix},$$

ove tutte le quantità $\varepsilon_{i\mu}$ hanno un modulo minore dell'unità.

Ciò posto, moltiplichiamo ambedue i membri della formola (3) per $e^{-z_o} . g_i(z_o)$; avremo le $n+1$ equazioni

$$e^{-z_o} . g_i(z_o) . P = \sum_{\mu=o}^{n} C_\mu e^{z_\mu - z_o} . g_i(z_o)$$

$$(i = o, 1, 2, \dots n);$$

ma dalle relazioni (5) si ricava

$$e^{z_\mu - z_o} . g_i(z_o) = g_i(z_\mu) + e^{-z_o} . \varepsilon_{i\mu} . \sigma$$

$$(i, \mu = o, 1, 2, \dots n).$$

Sostituendo nelle precedenti, si ottiene

$$(6) \quad e^{-z_o} . g_i(z_o) . P = \sum_{\mu=o}^{n} C_\mu g_i(z_\mu) + e^{-z_o} . \sigma . \sum_{\mu=o}^{n} \varepsilon_{i\mu} C_\mu$$

$$(i = o, 1, 2, \dots n).$$

Dimostriamo ora che le $n+1$ somme

$$\sum_{\mu=o}^{n} C_\mu g_i(z_\mu) \qquad (i = o, 1, 2, \ldots n)$$

sono numeri razionali, dei quali almeno uno diverso da zero.

Basterà perciò dimostrare che le dette somme sono funzioni simmetriche intere delle radici $x_1, x_2, \ldots x_r$ dell'equazione (1); ed infatti se indichiamo con $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_r$ delle variabili fra loro indipendenti, il prodotto

$$\sum_{a=1}^{r} N'_a e^{\xi_a} \cdot \sum_{b=1}^{r} N''_b e^{\xi_b} \ldots \sum_{l=1}^{r} N_l^{(k)} e^{\xi_l}$$

e quindi anche la somma

$$\sum_{a, b, \ldots l} N'_a N''_b \ldots N_l^{(k)} e^{\xi_a + \xi_b + \ldots + \xi_l}$$
$$(a, b, \ldots l = 1, 2, \ldots r)$$

sarà una funzione simmetrica di $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_r$; lo stesso dunque sarà anche della somma:

$$\sum_{a, b, \ldots l} N_a N''_b \ldots N_l^{(k)} (\xi_a + \xi_b + \ldots \xi_l)^m$$
$$(a, b, \ldots l = 1, 2, \ldots r)$$

ove m è un numero intero qualunque. Ponendo allora $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = x_2$, ... $\xi_r = x_r$, avremo che tutte le quantità $\sum_{\mu=o}^{n} C_\mu z_\mu^m$ saranno numeri razionali, e perciò anche tutte le espressioni

$$\sum_{\mu=o}^{n} C_\mu \cdot g_i(z_\mu) \qquad (i = o, 1, 2, \ldots n),$$

saranno numeri razionali. Inoltre almeno una di esse sarà diversa da zero; ed infatti se fosse

$$\sum_{\mu=o}^{n} C_\mu g_i(z_\mu) = o \qquad (i = o, 1, 2, \ldots n),$$

poichè tutte le C_μ non sono zero, dovrebbe essere nullo il determinante delle quantità $g_i(z_\mu)$, ciò che non è, per il modo con cui si son costruite le funzioni $g_i(z)$. Potremo infine moltiplicare tutti i numeri razionali

$$\sum_{\mu=o}^{n} C_\mu g_i(z_\mu) \qquad (i = o, 1, 2, \ldots n),$$

per un conveniente numero intero M, in modo che essi si mutino in $n+1$ numeri interi

$$Q_o, \; Q_1, \ldots Q_n,$$

dei quali almeno uno diverso da zero. Per il lemma del § precedente potremo inoltre supporre scelta la quantità σ tanto piccola che ognuna delle quantità

$$M \,.\, e^{-z_o} \,.\, \sigma \,.\, \sum_{\mu=o}^{n} \varepsilon_{i_\mu} C_\mu \qquad (i = o, 1, \ldots n)$$

risulti uguale ad una quantità η_i di modulo minore dell' unità. Le relazioni (6) assumeranno allora la forma seguente :

$$M \,.\, e^{-z_o} \,.\, g_i(z_o) \,.\, P = Q_i + \eta_i \qquad (i = o, 1, 2, \ldots n);$$

e poichè dei numeri interi Q_i, uno almeno è diverso da zero, mentre tutte le quantità η_i hanno un modulo minore dell' unità, una almeno delle quantità

$$M e^{-z_o} \,.\, g_i(z_o) \,.\, P \qquad (i = o, 1, 2, \ldots n)$$

sarà diversa da zero. Dunque il prodotto P e perciò anche la somma $\sum_{i=1}^{n} N_i e^{x_i}$, che ne è un fattore, sarà diversa da zero; e così il teorema A) resta dimostrato.

Da questo teorema ne dedurremo ora altri più generali, fino ad arrivare al teorema di Lindemann.

B) *Se* $x_1, x_2, \ldots x_r$ *sono le r radici (fra loro diseguali) di un' equazione algebrica*

$$x^r + c_1 x^{r-1} + \ldots + c_r = o$$

di grado r a coefficienti razionali, e se $N_1, N_2, \ldots N_r$ *sono r numeri razionali, dei quali uno almeno diverso da zero, la somma* $\sum_{i=1}^{r} N_i e^{x_i}$ *è diversa da zero.*

Ed infatti, basta moltiplicare $\sum_{i=1}^{r} N_i e^{x_i}$ per un conveniente numero intero, per ricondurci nelle condizioni del teorema A).

Dal teorema B), facendo

$$x_1 = o, \; x_2 = 1, \ldots x_r = r - 1,$$

segue in particolare il teorema di Hermite, cioè: *Il numero e non può esser radice di alcuna equazione algebrica*

$$N_r e^{r-1} + N_{r-1} e^{r-2} + \ldots + N_1 = o$$

a coefficienti razionali.

Passiamo ora a dimostrare il teorema:

C) *Se* $x_1, x_2, \ldots x_r$ *sono r numeri algebrici tra loro indipendenti, cioè non radici di una stessa equazione algebrica di grado r a coefficienti razionali, e diversi l'uno dall'altro; e se* $N_1, N_2, \ldots N_r$ *sono r numeri razionali dei quali almeno uno diverso da zero, la somma* $\sum_{i=1}^{n} N_i e^{x_i}$ *è diversa da zero.*

Ed infatti, potremo supporre che $x_1, x_2, \ldots x_r$ siano radici di una stessa equazione algebrica di grado $s > r$ a radici diseguali ed a coefficienti razionali; questa, oltre le radici $x_1, x_2, \ldots x_r$, ammetterà le altre $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots x_s$. Allora, se $N_1, N_2, \ldots N_r, N_{r+1}, \ldots N_s$ sono s numeri razionali, tali che uno almeno dei primi r sia diverso

da zero e che $N_{r+1} = N_{r+2} = \ldots = N_s = o$, avremo, per il teorema B), che la somma $\sum_{i=1}^{s} N_i e^{x_i}$ di s termini dovrà essere diversa da zero; ma, poichè i suoi ultimi $s - r$ termini sono nulli, anche la somma $\sum_{i=1}^{r} N^i e^{x_i}$ di r termini dovrà essere diversa da zero; e così resta dimostrato il teorema C).

Ed ora resta facile la dimostrazione del teorema generale di Lindemann, che contrassegneremo colla lettera D).

D) *Se $x_1, x_2, x_3, \ldots x_r$ sono r numeri algebrici qualunque diversi fra loro ed $N_1, N_2, \ldots N_r$ sono r numeri algebrici, dei quali almeno uno diverso da zero, la somma $\sum_{i=1}^{r} N_i e^{x_i}$ è sempre diversa da zero.*

Ed infatti, $N_1, N_2, \ldots N_r$ si potranno considerare come radici di un' equazione algebrica di grado $s \geq r$ a coefficienti razionali. Siano $N_1, N_2, \ldots N_r, N_{r+1}, \ldots N_s$ tutte le radici di questa equazione, delle quali potremo supporre che non ve ne siano più di $r - 1$ eguali a zero; riguardandoli come disuguali, formiamo tutte le disposizioni degli s elementi $N_1, N_2, \ldots N_s$ presi r ad r; esse saranno in numero di

$$k = s\,(s-1)\,(s-2)\ldots(s-\mathrm{r}+1),$$

e potranno indicarsi nel seguente modo:

$$\begin{array}{l} N_1', \quad N_2', \ \ldots N_r', \\ N_1'', \quad N_2'', \ldots N_r'', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ N_1^{(k)}, \ N_2^{(k)}, \ldots N_r^{(k)}. \end{array}$$

Per ipotesi in ciascuna di queste disposizioni vi sarà almeno un numero diverso da zero. Formiamo ora tutte le somme

$$\sum_{l=1}^{r} N_i^{(\mu)} e^{x_i} \quad (\mu = 1, 2, \ldots k);$$

una di queste sarà la somma

$$\sum_{i=1}^{r} N_i \, e^{x_i}$$

che vogliamo dimostrare diversa da zero. Facciamo poi il prodotto

$$P = \sum_{a=1}^{r} N'_a \, e^{x_a} \cdot \sum_{b=1}^{r} N''_b \, e^{x_b} \ldots \sum_{l=1}^{r} N_l^{(k)} \, e^{x_l} ;$$

esso si potrà scrivere, più brevemente, così:

$$P = \sum_{a, b, \ldots l} N'_a \, N''_b \ldots N_l^{(k)} \, e^{x_a + x_b + \ldots + x_l}$$
$$(a, b, \ldots l = 1, 2, \ldots r) .$$

Ora, indicando con $z_o, z_1, \ldots z_n$, i valori diversi che assume la somma $x_a + x_b + \ldots + x_l$ per tutti i sistemi di valori che si possono attribuire ad $a, b, \ldots l$, potremo scrivere

$$P = \sum_{\mu = o}^{n} C_\mu \, e^{z_\mu} ,$$

avendo posto

$$C_\mu = \sum_{a, b, \ldots l}' N'_a \, N''_b \ldots N_l^{(k)} ,$$

ove la somma deve intendersi estesa a tutti quei sistemi di valori di $a, b, \ldots l$, per cui $x_a + x_b + \ldots + x_l = z_\mu$.

Le quantità C_μ sono evidentemente simmetriche intere nelle quantità $N_1, N_2, \ldots N_s$ ed a coefficienti interi, quindi saranno tutti numeri razionali. Di più una almeno delle C_μ sarà diversa da zero, ciò che può dedursi ragionando come nella dimostrazione del teorema A).

Ora, essendo $z_o, z_1, \ldots z_n$ numeri algebrici fra loro diversi e $C_o, C_1, \ldots C_n$ numeri razionali, di cui uno almeno diverso da zero, per il teorema C) la somma $\sum_{\mu=1}^{n} C_\mu \, e^{z_\mu}$ non potrà esser nulla. Dunque P e quindi

anche la somma $\sum_{i=1}^{r} N_i e^{x_i}$, che ne è un fattore, non potrà essere uguale a zero. E così il teorema generale di Lindemann resta dimostrato.

§ 6. **Trascendenza dei numeri e e π. Impossibilità di rettificare con riga e compasso una circonferenza di dato raggio o un arco di cerchio di cui è data la corda.** — Dal teorema generale D), dimostrato nel paragrafo precedente, si possono dedurre molti importanti teoremi, dei quali ora andiamo a rilevare i più notevoli, ed in special modo la trascendenza dei numeri e e π.

1.° Si ponga

$$r = 2;\ N_1 = 1,\ N_2 = -X;\ x_1 = x,\ x_2 = o$$

nell' espressione $\sum_{i=1}^{r} N_i e^{x_i}$; essa diverrà $e^x - X$ e non potrà mai esser nulla se x è un numero algebrico diverso da zero ed X un numero algebrico qualunque; dunque:

Il logaritmo naturale di un numero algebrico X diverso da 1 è sempre un numero trascendente;

l' esponenziale e^x è un numero trascendente tutte le volte che x è un numero algebrico diverso da zero.

Come caso particolare di quest' ultimo teorema, facendo $x = 1$, si ha che *il numero e è un numero trascendente.*

2.° Si faccia

$$r = 2;\ N_1 = 1,\ N_2 = 1;\ x_1 = x,\ x_2 = o;$$

avremo che l' espressione $e^x + 1$ non potrà esser zero, finchè x è un numero algebrico; dunque, poichè sussiste l' identità $e^{\pi i} + 1 = o$, *il numero πi e quindi anche π sarà un numero trascendente.*

Segue da questo teorema (cfr. § 1) che partendo da un segmento, scelto come unità di misura, non si può,

con una costruzione in cui intervengano solo curve algebriche, costruire un segmento che abbia per misura π. E poichè la rettificazione e quadratura di un cerchio si riduce alla costruzione di un segmento eguale a π, partendo dal diametro preso come segmento unità (cfr. § 1), così:

Non si può effettuare la rettificazione e la quadratura di un cerchio, di cui è dato il diametro, mediante costruzioni geometriche in cui intervengano solo curve algebriche.

Ne segue *a fortiori* che *non si può effettuare la rettificazione e la quadratura di un cerchio, di cui è dato il diametro, mediante costruzioni geometriche in cui non vengano impiegati altri strumenti che riga e compasso.*

3.° Si faccia nell' espressione $\sum_{r=1}^{r} N_i e^{x_i}$

$$r = 3;\ N_1 = \frac{1}{i},\ N_2 = -\frac{1}{i},\ N_3 = -X;$$

$$x_1 = -x_2 = \frac{ix}{2},\ x_3 = o;$$

ne segue che l' espressione

$$\frac{e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}}{i} - X = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} - X$$

non potrà esser nulla, finchè x ed X sono ambedue numeri algebrici diversi da zero; ma, se scegliamo come unità di misura il raggio del cerchio, $2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}$ rappresenta la corda sottesa dall' arco di lunghezza x, dunque:

Un arco di cerchio, la cui corda, rispetto al raggio come unità lineare, abbia per misura un numero algebrico, è espresso da un numero trascendente; e lo stesso sarà del settore circolare corrispondente al detto arco.

Da questo teorema potremo concludere (cfr § 1), che:

Se la corda di un arco di cerchio di raggio unità è espressa da un numero algebrico, non si potrà rettificare l' arco, nè quadrare il settore circolare corrispondente, mediante costruzioni geometriche in cui intervengano solo curve algebriche.

A maggior ragione (cfr. § 1) potremo concludere che:

Non si può rettificare un arco di cerchio nè quadrare il settore circolare corrispondente, mediante costruzioni geometriche di sole rette e circoli, quando la corda sottesa dall' arco è espressa pel raggio mediante operazioni razionali e radici quadrate e quindi è essa stessa elementarmente costruibile.

§ 7. **Risoluzione grafica del problema di rettificazione e quadratura del cerchio mediante l' integrafo.** — La questione, intorno alla quale si affaticarono i matematici per tanto tempo, se si possa rettificare o quadrare un cerchio di dato raggio con costruzioni di sole rette e circoli, ossia mediante il solo uso della riga e del compasso, rimane dunque, per i risultati esposti nel paragrafo precedente, risoluta negativamente ed in un senso anche molto più ampio di quello in cui è stata posta.

Nella impossibilità di rettificare il cerchio mediante il solo impiego di rette e circoli, si può cercare di ottenere la rettificazione stessa mediante curve di natura più complicata; appunto come, per risolvere i problemi della trisezione dell' angolo e della duplicazione del cubo, non bastando rette e circoli, si ricorre alle sezioni coniche od a curve algebriche superiori.

Per costruire π, a partire dal segmento scelto come unità di misura, basterebbe, per esempio, poter tracciare una curva, che, riferita ad un determinato sistema di assi cartesiani ortogonali, avesse un punto di cui una

delle coordinate fosse esprimibile per π mediante operazioni razionali e radici quadrate, e l' altra coordinata fosse costruibile elementarmente, ossia rappresentata da un' espressione contenente solo numeri razionali ed irrazionalità quadratiche (cfr. § 1).

A causa della trascendenza del numero π, la prima coordinata dal punto stesso risulterebbe pure trascendente; ne segue che una curva dotata di questa proprietà non potrebbe essere che una curva trascendente.

Una curva che potrebbe essere impiegata per il nostro scopo è la sinusoide

$$y = \text{arc sen } x;$$

ed infatti i punti d' intersezione di questa curva coll' asse y ci darebbero, colle loro ordinate, π e tutti i suoi multipli. Si potrebbero moltiplicare gli esempi di curve trascendenti che, una volta descritte con un tratto continuo, fornirebbero la soluzione grafica del problema di rettificazione del cerchio.

Mostriamo ora come alcune di esse si possano effettivamente disegnare in modo continuo mediante degli strumenti detti *integrafi*.

Chiamando *curva differenziale* una curva qualunque

$$y = f(x)$$

si dice *curva integrale* la curva che ha per equazione

$$Y = F(x),$$

essendo

$$F(x) = \int f(x)\, dx\,.$$

Data la curva differenziale, la curva integrale resta dunque definita a meno di una traslazione parallelamente all' asse y. Cosi p. es. la sinusoide

$$y = \text{arc sen } x$$

è la curva integrale della curva

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

che è algebrica del quart' ordine. Analogamente se partiamo dal cerchio di raggio 1, col centro nell' origine delle coordinate,

$$x^2 + y^2 = 1,$$

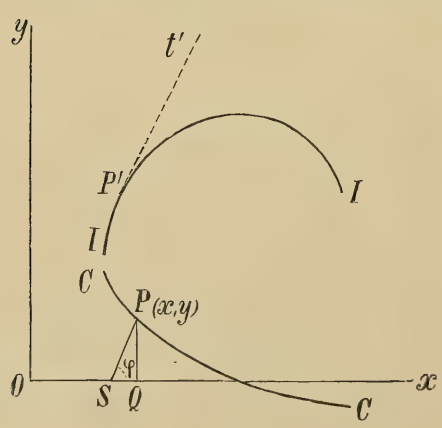
come curva differenziale, la sua curva integrale sarà

$$y = \int \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} \text{ arc sen } x + \frac{x}{2} \sqrt{1 - x^2};$$

e le ordinate dei punti d' intersezione di questa curva coll' asse y ci daranno π ed i suoi multipli.

Uno strumento, che ci permetta di descrivere con un tratto continuo la curva integrale, una volta che sia disegnata la curva differenziale, potrà dunque essere impiegato per la costruzione grafica di π.

Un tale strumento, detto *integrafo*, è stato effettivamente inventato or sono pochi anni dal russo Abdank-Abakanowicz e poi perfezionato dal Corradi di Zurigo.



Accenneremo qui brevemente al principio fondamentale su cui è basato e descriveremo le parti essenziali di cui l' apparecchio si compone, rimandando per la descrizione particolareggiata dell' apparecchio e delle sue svariate applicazioni all' opera dello stesso

inventore tradotta in tedesco dal Bitterli col titolo *Die Integraphen.* Lipsia 1889 (1).

Immaginiamo tracciati i due assi ortogonali Ox, Oy e la curva differenziale C di equazione

$$y = f(x).$$

Considerando un punto qualunque P di coordinate x, y appartenente alla curva C, formiamo il triangolo che ha per vertici: il punto P, il piede Q dell'ordinata abbassata da P, ed il punto S, dell'asse Ox, distante da Q di un segmento eguale all'unità di misura. La tangente dell'angolo φ che l'ipotenusa del triangolo forma coll'asse delle ascisse sarà data da

$$tg\,\varphi = \frac{PQ}{QS} = y.$$

D'altra parte, essendo

$$Y = \int f(x)\,dx$$

l'equazione della curva integrale I, avremo che la tangente trigonometrica dell'angolo, che la tangente t' alla curva stessa nel punto P' corrispondente a P (cioè avente la medesima ascissa x) forma coll'asse delle ascisse, sarà data da

$$\frac{dY}{dx} = f(x) = y.$$

Ne segue che *per ogni punto della curva differenziale l'ipotenusa del triangolo considerato è costantemente parallela alla tangente della curva integrale cercata nel punto corrispondente.*

È questa osservazione che ha guidato Abdank-Abakanowicz nella costruzione dell'integrafo, che ora descriveremo, tenendo conto delle modificazioni portatevi dal costruttore Corradi.

---

(1) Se ne può vedere una descrizione sommaria anche nel *Repertorio di Matematiche Superiori* di E. Pascal. Milano, 1898, vol. I, p. 634 e segg.

Nelle due figure (Fig. 1 e 2), qui tracciate, sono rappresentate schematicamente le sezioni orizzontale e verticale dell' apparecchio.

Tre guide orizzontali e parallele fra loro L, L_1, L_2, son collegate da due sbarre trasverse T, T' in modo da formare un telaio solido rettangolare; questo riposa su quattro ruote R per le quali può assumere sul foglio del disegno un moto rettilineo in direzione parallela all' asse delle ascisse. Le guide L ed L_1 portano nella loro superficie superiore una scanalatura, lungo la quale possono scorrere le due rotelle r, r_1, che rendono mobile il carrello A lungo la guida L, e le due rotelle r_2, r_3 che rendono mobile il carrello B lungo la guida L_1. A mantenere i due carrelli perfettamente orizzontali servono la ruota r_4, fissata nel carrello A e mobile lungo una scanalatura della guida L_2, e la ruota r_5, fissata nel carrello B e mobile lungo la scanalatura di una guida L_3 sottoposta ad L_1 e parallela ad L_1 (invisibile nella Fig. 1).

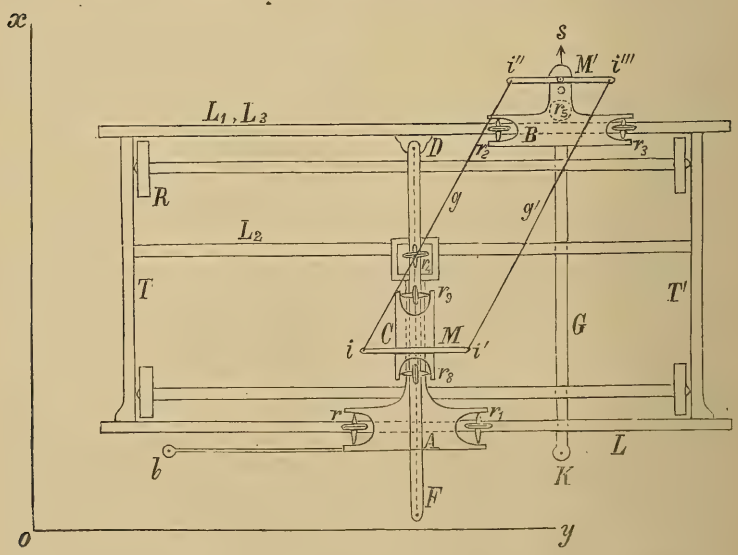


Fig. 1.

Nel carrello A è fissato un asse verticale a (invisibile nella Fig. 1), intorno al quale è libero di girare un carrello portante due piccole rotelle r_6, r_7. Il braccio F, orizzontale e girevole intorno ad un asse verticale fissato in D, porta nella sua superficie inferiore una scanalatura nella quale sono impegnate e possono scorrere le due rotelle r_6, r_7. Con questa disposizione, se immaginiamo tracciate nel foglio del disegno due assi rettangoli, ox perpendicolare ed oy parallelo alla guida L, ad una punta b invariabilmente collegata al carrello A potrà esser impresso un movimento nel senso ox e un movi-

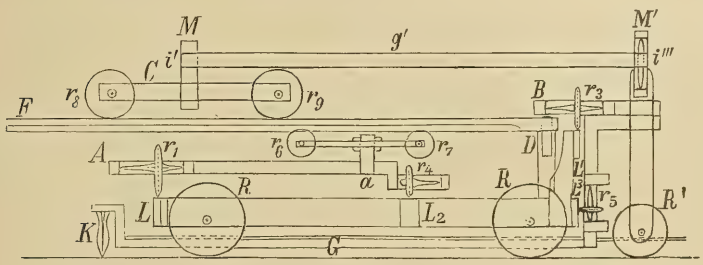


Fig. 2.

mento nel senso oy; e perciò essa potrà descrivere una linea qualunque $y = f(x)$. Il punto in cui l' asse a incontrerebbe il piano xy, essendo legato invariabilmente al punto b e partecipando dello stesso movimento, descriverà l' identica curva, ed il segmento, che lo congiunge colla proiezione ortogonale del punto D sul piano xy, manterrà sempre durante il movimento una proiezione costante sull'asse delle ascisse; è questa proiezione, variabile nello strumento che stiamo descrivendo fra 10 cm. e 20 cm., che rappresenta l' unità lineare dell' apparecchio ed è la base di quel triangolo rettangolo di cui sopra abbiamo parlato; per modo che la direzione variabile dell' ipotenusa del detto triangolo sarà in ogni istante rappresentata dal braccio F girevole intorno a D.

Le parti dell' apparecchio che andremo ora a descrivere hanno l' ufficio di guidare sul foglio del disegno una punta K scrivente, in modo che la direzione del suo movimento sia in ogni istante parallela alla direzione variabile del braccio F, per modo che K venga a descrivere la curva integrale della curva $y = f(x)$. Il braccio F porta anche nella sua superficie superiore una scanalatura; in questa possono scorrere le rotelle r_8, r_9 di un carrello orizzontale C, sul quale è fissata una sbarra orizzontale M perpendicolare al piano delle due rotelle cioè perpendicolare al braccio F.

Alle due estremità della sbarra M son fissate due assi i, i' verticali.

Nel carrello B si trova un asse verticale cilindrico o, intorno al quale è girevole un telaio M'; su questo telaio sono fissati superiormente i due assi verticali i'', i''' tali che il segmento che li congiunge è eguale al segmento che congiunge gli assi i, i' fissati nella sbarra M; gli assi i, i' son legati agli assi i'', i''' mediante due asticelle gg' eguali fra loro in modo da formare un parallelogramma articolato. Nella parte inferiore del telaio M' si trova la rotella R' disposta in modo da avere il suo asse parallelo al segmento $i''\ i'''$ ed il suo centro sul prolungamento dell' asse o.

La rotella R' è premuta contro il foglio del disegno dal peso del telaio M', per modo che essa non possa muoversi che in direzione parallela al proprio piano, cioè nella direzione s normale al segmento $i''\ i'''$ e perciò parallela al braccio F.

Per tale disposizione, mentre il carrello A scorre lungo la guida L, il braccio F ruoterà intorno a D in modo da obbligare il carrello C a scorrere lungo il braccio stesso; e, poichè l' asta $i\ i'$ riman sempre perpendicolare al braccio F, mediante il parallelogramma snodato anche il segmento $i''\ i'''$ e quindi anche la

rotella R parteciperà dello stesso movimento angolare del braccio F. Al telaio M è fissato un braccio G che, passando al disotto dell' apparecchio, termina con un tiralinee o punta scrivente K; mentre la punta b disegna la curva differenziale, la punta K disegnerà la curva integrale. I punti corrispondenti delle due curve stanno sulla medesima ordinata.

§ 8. **Costruzioni geometriche per rettificare e quadrare il cerchio in modo approssimato.** — Quando si voglia far uso soltanto della riga e del compasso senza ricorrere a strumenti trascendenti, quali sarebbero p. es. gli integrafi, la risoluzione del problema, del quale ci occupiamo, non si potrà ottenere in modo esatto; sono state proposte, per altro, e sono in uso nella pratica, delle costruzioni, mediante le quali, con sole rette e circoli si può effettuare la rettificazione e quadratura del cerchio in via approssimativa, cioè commettendo un errore per gli usi comuni trascurabile.

Ecco una costruzione ideata dallo Specht [1], mediante la quale si può rettificare il cerchio con grande approssimazione.

Sopra una tangente al cerchio di raggio r (Fig. 3) si stacchi, a partire dal punto di contatto A, il segmento AB

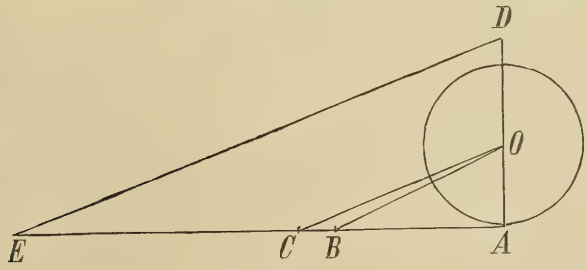


Fig. 3.

[1] *Giornale di Crelle,* vol. 3, pag. 83.

uguale al diametro più un quinto del raggio, e di seguito si porti il segmento BC eguale ai due quinti del raggio; si unisca O con B e con C; sul diametro che passa per A si stacchi AD eguale ad OB e per D si conduca ad OC la parallela che incontri la tangente in E. Il segmento AE sarà con grande approssimazione eguale alla circonferenza.

Ed infatti si ha

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AO} = \frac{13}{5},$$

da cui

$$AE = \frac{13}{5} \cdot OB = r \cdot \frac{13}{5} \sqrt{1 + \left(\frac{11}{5}\right)^2} = r \cdot \frac{13}{25} \sqrt{146}.$$

Eseguendo le operazioni, si trova

$$AE = r \cdot 6,2831839\ldots;$$

e poichè si ha

$$2\pi = 6,2831853\ldots,$$

risulta che AE differisce per difetto della circonferenza per meno di due milionesimi del raggio.

Il rettangolo che ha per lati AE e la metà del raggio r, o il quadrato equivalente, darà con grande approssimazione la quadratura del cerchio.

Quando si abbia in mira soltanto la quadratura del cerchio, si può far uso di quest' altra costruzione [1].

---

[1] Vedi *Geometria elementare* di SANNIA e D' OVIDIO, ove son riportate anche altre costruzioni per la rettificazione e quadratura approssimata del cerchio.

Sul diametro AB del cerchio dato (Fig. 4) si porti il segmento OD eguale a tre quinti del raggio e della parte opposta il segmento OF eguale a tre volte la metà del raggio; si divida poi il raggio OB per metà nel punto E e sopra DE, AF come diametri si descrivano da bande opposte del diametro due semicerchi.

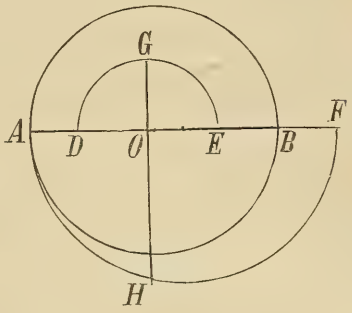


Fig. 4.

Per O si conduca al diametro AB la perpendicolare che incontri le due semicirconferenze in G, H; dico che il quadrato avente per lato GH equivale con grande approssimazione al cerchio dato.

Ed infatti si ha per costruzione

$$OD = r \cdot \frac{3}{5}, \quad OE = r \cdot \frac{1}{2},$$

$$OA = r, \qquad OF = r \cdot \frac{3}{2}.$$

Ma OG è medio proporzionale fra OD, OE, ed OH è medio proporzionale fra OA, OF; quindi

$$OG = r \cdot \sqrt{\frac{3}{10}}, \quad OH = r \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}$$

e perciò

$$GH = r \cdot \frac{\sqrt{30} + \sqrt{150}}{10} = r \cdot 1,77246\ldots;$$

e poichè si ha

$$\sqrt{\pi} = 1,77245\ldots,$$

GH differisce per eccesso dal lato del quadrato equivalente al cerchio dato, per meno di due centomillesimi del raggio.

§ 9. **Lunule quadrabili.** — In questo paragrafo vogliamo mostrare come si possano dare degli esempii di superficie piane, limitate da archi di cerchio, suscettibili di esser quadrate mediante costruzioni elementari, cosa che per l' intero cerchio abbiamo dimostrato impossibile.

Un primo esempio di questo genere è offerto dalla cosiddetta *lunula di Ippocrate*, che si ottiene nel modo seguente.

Sia il triangolo rettangolo ed isoscele ADB (Fig. 5), consideriamo la circonferenza $ADBH$ ad esso circoscritta, il cui centro C sarà il punto medio dell' ipotenusa AB; sia poi $FBAE$ il semicerchio di centro D e di raggio DB, limitato dal diametro FE parallelo ad AB.

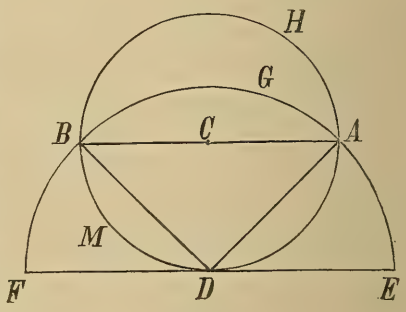


Fig. 5.

Dico che il menisco (*lunula* d' Ippocrate) compreso fra la semicirconferenza AHB ed il quadrante AGB è equivalente al triangolo ADB.

Ed infatti,

$$DB^2 = 2CA^2,$$

dunque il semicerchio di diametro EF è doppio del semicerchio di diametro AB; e quindi il settore circolare $DBGA$ è equivalente al semicerchio di diametro AB; togliendo da ambedue il segmento circolare $ACBG$, ne resulta l' equivalenza enunciata. Ne segue che, dato AB, la lunula $AGBH$ è quadrabile elementarmente; e tale sarà pure il triangolo mistilineo $DMBF$, che, come è facile vedere, è metà della lunula stessa.

Altri casi di lunule quadrabili sono stati trovati da Th. Clausen [1] nel modo seguente.

Siano AEB, $AE'B$ due archi circolari (Fig. 6) aventi a comune la corda AB, e siano C, C' i loro rispettivi centri ed r, r' i rispettivi raggi. Se indichiamo con 2φ, $2\varphi'$, gli angoli al centro dei due settori corrispondenti $CAEB$, $C'AE'B$, si avrà intanto

$$r \,.\, \text{sen}\,\varphi = r' \,.\, \text{sen}\,\varphi' .$$

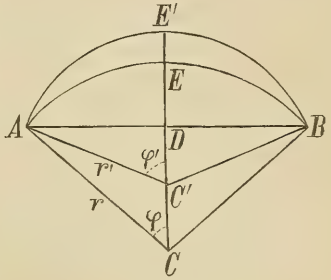


Fig. 6.

Supponiamo di più che questi due settori siano fra loro equivalenti; dovrà esser soddisfatta l'altra equazione

$$r^2 . \varphi = r'^2 . \varphi' .$$

Eliminando fra queste due equazioni r, ed r' si trova per φ e φ' l'unica equazione

$$(\alpha) \qquad \sqrt{\varphi'} \,.\, \text{sen}\,\varphi = \sqrt{\varphi} \,.\, \text{sen}\,\varphi',$$

soddisfatta la quale, i due settori risultano equivalenti, e perciò la lunula $AEBE'$ resulta equivalente al poligono $ACBC'$, e perciò quadrabile elementarmente. Resta a vedere se l'ultima equazione possa risolversi per radicali quadratici, ossia se le lunule corrispondenti possano esse stesse costruirsi elementarmente. È chiaro che ciò non sarà possibile in generale; ma, poichè uno dei due angoli φ, φ', p. es. φ', possiamo sceglierlo a nostro arbitrio, in certi casi l'equazione rimanente in φ potrà fornirci i valori delle funzioni trignometriche di φ, espressi per soli radicali quadratici. Ciò accade effettivamente, p. es, nei seguenti casi:

$$(1) \qquad \varphi' = 2\varphi;$$

---

[1] *Vier neue mondformige Flächen, deren Inhalt quadrirbar ist* — *Giorn. di Crelle*, 1840, vol. 21, pag. 375.

l' equazione (α) diviene

$$\sqrt{2\varphi} \,.\, \text{sen}\, \varphi = \sqrt{\varphi} \,.\, \text{sen}\, 2\varphi$$

e ci dà

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi = 45^\circ ;$$

ritroviamo così il caso, già considerato sopra, della lunula d' Ippocrate.

(2) $$\varphi' = 3\varphi;$$

l' equazione (α) diviene

$$\sqrt{3\varphi} \,.\, \text{sen}\, \varphi = \sqrt{\varphi} \,.\, \text{sen}\, 3\varphi ,$$

ossia

$$\sqrt{3} = 4 \cos^2 \varphi - 1 ,$$

da cui

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{3}}}{2}$$

(3) $$\varphi' = \frac{3}{2} \varphi;$$

l' equazione (α) diviene

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \,.\, \varphi \,\text{sen}\, \varphi = \sqrt{\varphi} \,.\, \text{sen} \left(\frac{3}{2} \varphi\right),$$

da cui si ricava

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{33} - 1}{8} .$$

Altri casi, per cui l'equazione (α) diventa risolubile per radicali quadratici, si ottengono facendo $\varphi' = 5\varphi$ oppure $\varphi' = \frac{5}{3} \varphi$. In corrispondenza di ognuno di questi, data la corda AB ad arbitrio, si potrà costruire elementarmente una lunula avente i vertici in A, B e quadrabile mediante il solo impiego della riga e compasso.

§ 10. **Cenno storico sulle ricerche relative al problema della quadratura del cerchio dai tempi antichi fino ai nostri giorni.** — Le ricerche relative al problema della quadratura del cerchio si possono distribuire nei tre seguenti periodi di tempo [1]:

Il 1.° si estende dai primi principii della speculazione matematica fino alla scoperta del calcolo differenziale e integrale, cioè fino alla metà del secolo 17.°; scopo dei lavori in esso compresi è la determinazione numerica approssimata del rapporto della circonferenza al diametro, ottenuta mediante costruzioni geometriche.

Nel 2.° periodo, che dalla scoperta del calcolo differenziale e integrale va sino alla metà del secolo 18°, al posto dei metodi geometrici degli antichi subentrano i nuovi metodi analitici; le ricerche di questo periodo hanno un carattere essenzialmente teorico, avendo in mira la rappresentazione del numero π mediante espressioni analitiche contenenti un numero infinito di operazioni, cioè mediante sviluppi in serie, in prodotto infinito, in frazione continua.

Infine il 3.° periodo, dalla metà del secolo passato fino ai nostri giorni, contiene memorie d'indole critica, nelle quali non si tratta più di determinare la grandezza o l'espressione analitica del numero π, ma di ricercare qual sia la natura di questo numero, se razionale o irrazionale, se algebrico o trascendente.

Periodo I — Il problema di costruire un quadrato equivalente ad un dato cerchio si trova enunciato per la prima volta nel più antico documento matematico che si conosca, cioè nel *Papyrus Rhind*, di cui fu autore lo scrittore egiziano Ahmes circa 2000 anni av. Cr., e che

---

[1] Per tracciare questo breve quadro storico abbiamo preso a guida l'accuratissima opera del Rudio: *Archimedes, Huyghens, Lambert, Legendre*. Lipsia, 1892.

si trova ora conservato nel Museo britannico. In esso si trova enunciata senza dimostrazione la seguente regola per risolvere il problema: L' area del cerchio equivale a quella di un quadrato, il cui lato è il diametro del cerchio diminuito di $\frac{1}{9}$ della sua lunghezza. Secondo questa regola, si trova per area del cerchio,

$$\left(\frac{8}{9}\right)^2 d^2 = \frac{64}{81} d^2,$$

che, confrontato con $\frac{1}{4} \pi d^2$, dà per π il valore

$$\frac{256}{81} = 3,1604\ldots,$$

cioè un valore già discretamente approssimato.

Il primo accenno al problema della rettificazione della circonferenza si trova nella Bibbia, in cui si attribuisce alla circonferenza una lunghezza tripla di quella del diametro; se ne deduce per π il valore 3, molto più inesatto di quello assegnatogli dagli Egiziani.

Soltanto presso i Greci hanno principio le ricerche scientifiche sull' argomento, raggiungendo un alto grado di sviluppo nell'opera di Archimede di Siracusa (287-212 a. C.). Fra i matematici greci, che prima di Archimede si occuparono della quadratura del cerchio, meritano speciale menzione Ippocrate di Chio (circa 450 anni a. C.) e Dinostrato (circa 550 a. C.). Si deve ad Ippocrate la prima dimostrazione del teorema che le superficie dei cerchi sono proporzionali ai quadrati dei diametri, ed il primo esempio di un' effettiva quadratura di superficie limitate da linee curve, cioè della cosidetta *lunula* di Ippocrate, della quale già abbiamo fatto parola nel § 9.

Profittando di questi resultati, egli sperava di giungere mediante costruzioni elementari alla quadratura del cerchio, ma i suoi tentativi dovevano necessariamente riuscire inutili.

Dinostrato mostrò come si potesse impiegare per la rettificazione e quadratura del cerchio una curva già costruita ed utilizzata da Ippia di Elide (circa 450 a. C.) per la trisezione dell' angolo. È questa una curva trascendente nota appunto sotto il nome di τετραγωνίζουσα o *quadratrice*; dalla sua definizione geometrica si può ricavare la seguente equazione in coordinate cartesiane ortogonali x, y,

$$x = \frac{y}{tg\left(\frac{\pi}{2} \cdot y\right)}.$$

Il punto, in cui essa incontra l' asse delle x, ha per ascissa $\frac{2}{\pi}$. Dunque, disegnata la curva e trovato questo punto, con sole rette e circoli si può rettificare il cerchio; ma la costruzione della curva si può effettuare solo per punti, e quindi può dare soltanto una soluzione approssimata del problema.

Risultati di gran lunga più importanti son quelli dovuti ad Archimede, il quale, nel suo scritto intitolato κύκλου μέτρησις, dimostrò l' equivalenza dei due problemi della quadratura e della rettificazione del cerchio ed espose con rigore scientifico il noto metodo dei poligoni inscritti e circoscritti. Egli applicò questo metodo alla rettificazione approssimata del cerchio: partendo dallo esagono regolare inscritto e circoscritto, calcolò i perimetri dei poligoni successivi ottenuti raddoppiando il numero dei lati; e spingendosi fino al poligono di $6 \cdot 2^4 = 96$ lati, trovò per il rapporto della circonferenza al diametro i limiti $3\frac{10}{71}$, $3\frac{1}{7}$, dei quali il secondo, appros-

simato per eccesso a meno di $\frac{2}{1000}$, è ancora attualmente spesso utilizzato in pratica a causa della sua grande semplicità.

Il problema della quadratura approssimata del cerchio con un grado qualunque di approssimazione poteva considerarsi come completamente risoluto dal metodo di Archimede, e, malgrado la lunghezza dei calcoli ch' esso richiede per ottenere una soluzione discretamente approssimata, questo metodo rimase in uso, quasi senza alcuna modificazione, per un lungo tratto di tempo, cioè fino a che per opera dello Snellio e del Huyghens non fu portato a quel grado di perfezione e di semplicità che ancora si potesse raggiungere con mezzi elementari. Fra i molti matematici, che in questo intervallo di tempo si occuparono del calcolo approssimato del rapporto della circonferenza al diametro, il primo a trovare un valore, molto più prossimo al vero di quelli trovati anteriormente, è stato il matematico olandese Adriano Mezio seconda metà del sec. 16.°), che assegnò per π il valore $\frac{355}{113} = 3,1415029....$ diverso dal vero solo dalla 7.ª cifra decimale in poi e di particolare interesse per essere una delle ridotte dello sviluppo di π in frazione continua. In seguito il matematico francese Francesco Vieta (1540-1603), sempre col metodo di Archimede, spingendo il calcolo fino al poligono di 6.2^{16} lati, dètte il valore di π con 9 cifre decimali esatte; questo grado di approssimazione fu sorpassato in seguito dall' olandese Adriano Romano (morto nel 1616), che, giungendo al poligono di 2^{30} lati, calcolò π con 15 cifre decimali; ed infine da Ludolph van Ceulen (1539-1610), che, con una pazienza e costanza ammirabili, spinse il calcolo fino a 35 decimali esatte.

Sopra tutte queste ricerche si elevarono di gran lunga, per originalità e per valore scientifico, i classici

lavori dei due grandi matematici e fisici olandesi, Snellius (1580-1626) ed Huyghens (1629-1695). Specialmente per opera del Huyghens, nella sua memoria *De circuli magnitudine inventa,* risultò che dal confronto delle aree e dei perimetri di due poligoni regolari, uno inscritto e l'altro circoscritto al cerchio, si possono ricavare per il rapporto π due limiti assai più ristretti che non coll'ordinario procedimento di Archimede; per modo che il calcolo di π viene molto semplicizzato. Così, per esempio, dall'impiego del poligono di 60 lati, il Huyghens ottenne il numero π con 9 decimali esatte, mentre secondo Archimede occorre il poligono di 96 lati per avere appena due cifre decimali.

Periodo II — Appartiene alla seconda metà del secolo 17.° il primo sorgere dell'analisi moderna per opera principalmente del Newton, Leibniz e dei due fratelli Bernoulli. Nuove idee e nuovi metodi si sostituiscono agli antichi e le grandi scoperte di cui sono fecondi cambiano fino dalle fondamenta l'edifizio delle scienze matematiche. In particolare, nella teoria della misura del cerchio si abbandonano i metodi geometrici di Archimede e del Huyghens per rivolgersi a ricerche di un carattere essenzialmente diverso, tendenti cioè a trovare per il rapporto della circonferenza al diametro delle rappresentazioni analitiche contenenti una serie infinita di operazioni.

In ordine a questo nuovo indirizzo di studii, il Wallis (1616-1703) dètte il seguente sviluppo di π in prodotto infinito

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots$$

e dimostrò esatto lo sviluppo in frazione continua

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2 +} \frac{9}{2 +} \frac{25}{2 +} \frac{49}{2 +} \frac{81}{2 +} \cdots,$$

enunciato dal Brouncker (1620-1684) senza dimostrazione.

Per gli sviluppi del numero π in serie infinita, trovati in questo torno di tempo, il punto di partenza è costituito dal seguente sviluppo di arc $tg\, x$ trovato prima dal Gregory (1670) e poi indipendentemente dal Leibniz (1673)

$$\text{arc } tg\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots,$$

al quale si può giungere facilmente applicando la nota formula del Mac-Laurin. Facendo $x = 1$, si ottiene la cosiddetta serie del Leibniz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots.$$

Ma questa serie, come i precedenti sviluppi in prodotto infinito ed in frazione continua, è lentamente convergente.

Molti altri sviluppi più appropriati al calcolo di π sono stati dedotti dalla serie che dà arc $tg\, x$, tenendo conto della relazione

$$\text{arc } tg\, x + \text{arc } tg\, y = \text{arc } tg\, \frac{x+y}{1-xy}$$

e delle altre che ne conseguono. Fra tutti citiamo come ottimo, per il calcolo di π, il seguente, dato dal matematico inglese Machin (1680-1752),

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\,.\,5^3} + \frac{1}{5\,.\,5^5} - \frac{1}{7\,.\,5^7} + \ldots\right)$$

$$-\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\,.\,239^3} + \frac{1}{5\,.\,239^5} - \frac{1}{7\,.\,239^7} + \ldots\right).$$

Utilizzando questa serie ed altre consimili fu calcolato π con più di 100 decimali esatte.

Tutti questi studii, sebbene abbiano per sè una grande importanza scientifica, non svelano tuttavia niente riguardo alla natura del numero π; ed all' epoca di cui ci occupiamo non ancora si sapeva se questo numero fosse razionale o irrazionale; così la questione della possibilità della quadratura del cerchio mediante circoli e rette rimaneva insoluta, ed anzi neppure era stata ancora enunciata in un modo tanto preciso (cfr. § 1) da permettere una risposta decisiva.

La chiave per la soluzione della questione doveva esser fornita da ricerche aventi un indirizzo essenzialmente diverso, le cui basi fondamentali furon poste da Eulero nei suoi studii sulle funzioni trigonometriche e sulla funzione esponenziale e^x.

L' inglese Napier (1614) fu il primo a prendere in considerazione il numero e e la funzione esponenziale e^x, avendo scelto il numero e come base di un sistema di logaritmi, detti logaritmi naturali o neperiani.

Eulero (1707-1783), applicando i metodi dell' analisi infinitesimale allo studio delle funzioni, ed estendendo la variabilità delle grandezze a valori complessi, scoprì la intima relazione che passa fra la funzione esponenziale e^x e le funzioni circolari sen x, cos x,.... Partendo dagli sviluppi delle espressioni e^x, sen x, cos x in serie di potenze

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

che valgono, secondo la formola del Mac-Laurin, per valori reali della variabile x, Eulero, assicuratosi della loro convergenza iu tutto il piano, cioè per qualsiasi valore

anche complesso della variabile, li prese a definizione delle funzioni corrispondenti, e ne dedusse l' identità

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x ,$$

che stabilisce appunto la dipendenza fra la funzione esponenziale e le funzioni circolari. Se in questa identità si pone $x = \pi$, si ottiene la relazione

$$e^{i\pi} = -1 ,$$

sulla quale più tardi (cfr. § 6) doveva esser basata la dimostrazione della trascendenza del numero π, e quindi la risposta alla questione della quadratura del cerchio. Ad Eulero si devono inoltre innumerevoli sviluppi dei numeri e e π in serie ed in frazione continua, fra i quali rileviamo il seguente

$$\frac{e-1}{2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14} + \frac{1}{18} + \ldots ,$$

che doveva poi servire al Lambert per dimostrare che i due numeri e e π sono irrazionali.

Periodo III — Dopochè Eulero ebbe scoperta l' intima relazione esistente fra la funzione esponenziale e le funzioni trigonometriche, fra il numero e ed il numero π, nuove vie di ricerca venivano aperte per rendersi conto della natura di questi numeri, che, malgrado tutti gli studii di cui finora erano stati oggetto, rimaneva completamente ignota, ed in cui ormai si riconosceva doversi trovare la chiave della questione della quadratura del cerchio. I primi risultati di importanza fondamentale in quest'ordine di ricerche si devono al Lambert (1728-1777), il quale, nella sua memoria *Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen* (1766), dimostrò che i due numeri e e π sono irrazionali. Par-

tendo dallo sviluppo di $\frac{e-1}{2}$ in frazione continua dato dall' Eulero e di sopra citato, ne dedusse i due seguenti

$$\frac{e^x-1}{e^x+1}=\cfrac{1}{\cfrac{2}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{6}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{10}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{14}{x}+\ldots}}}},$$

$$tg\,x=\cfrac{1}{\cfrac{1}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{3}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{5}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{7}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{9}{x}-\ldots}}}}},$$

basandosi sui quali egli stabilì i due seguenti teoremi:

1.° *Se x è un numero razionale diverso da zero: non potrà mai essere e^x un numero razionale.*

Per $x=1$ resulta come caso particolare l' irrazionalità del numero e.

2.° *Se x è un numero razionale diverso da zero, non potrà mai essere tgx un numero razionale.*

Per $x=\frac{\pi}{4}$ è $tg\,\frac{\pi}{4}=1$, e resulta come caso particolare l' irrazionalità del numero π.

La dimostrazione di questi teoremi fu poi resa rigorosa e completa dal Legendre (1752-1833), il quale dimostrò collo stesso metodo che anche *il quadrato di π è un numero irrazionale.*

In seguito (1840) il Liouville (1809-1882) dimostrò che il numero e non può esser radice di alcuna equazione quadratica a coefficienti razionali.

Da questi resultati sorgevano spontaneamente le domande:

Di quali equazioni algebriche a coefficienti razionali possono esser radici i numeri e e π?

Non ci troveremmo per caso di fronte a dei numeri che non sono radici di alcuna equazione algebrica di questa specie?

Il dubbio contenuto in quest' ultima domanda fu dapprima esplicitamente espresso dal Legendre e poi confortato dalle ricerche del Liouville, le quali, per la prima volta (1844), stabilivano l' esistenza di numeri non algebrici e rendevano giusta la distinzione dei numeri in algebrici e trascendenti (cfr. i §§ 1, 2, 3).

In seguito ad una minuta analisi delle proprietà della funzione esponenziale, come abbiamo già detto nel § 4, Hermite riuscì a dimostrare nel 1873 la trascendenza del numero e e il Lindemann, appoggiandosi sulle ricerche di Hermite e traendo profitto dalla relazione $e^{i\pi} = -1$, scoperta da Eulero, dimostrò nel 1882, che anche π è un numero trascendente, provando in tal modo l' impossibilità di rettificare e quadrare il cerchio mediante costruzioni elementari (cfr. § 1). Delle semplicizzazioni apportate dal Weierstrass alla dimostrazione del Lindemann già abbiamo fatto parola nel § 4 ed abbiamo esposto nei §§ 4, 5, 6 la dimostrazione data dal Weierstrass del teorema generale del Lindemann, pel quale resta risoluta anche la questione più generale della rettificazione di un arco circolare qualunque.

Vogliamo ora accennare alle recenti ricerche, per le quali la dimostrazione della trascendenza dei numeri e e π fu ancora notevolmente semplicizzata: alludiamo alle dimostrazioni date successivamente dal Hilbert, Hurwitz e Gordan e raccolte nel vol. 43 dei *Mathematische Annalen* (1893).

Supponendo che il numero e verifichi l' equazione algebrica a coefficienti razionali interi

$$(1) \qquad a + a_1 e + a_2 e^2 + \ldots + a_n e^n = o,$$

il Hilbert moltiplica ambedue i membri di questa equazione per l' integrale definito

$$\int_o^\infty z^\rho (z-1)(z-2)\ldots(z-n)^{\rho+1} e^{-z} dz \quad (\rho \text{ int. pos.})$$

e poi decompone il primo membro nelle due parti

$$P_1 = a\int_o^\infty + a_1 e \int_o^\infty + a_2 e^2 \int_o^\infty + \ldots + a_n e^n \int_o^\infty$$

$$P_2 = a_1 e \int_o^1 + a_2 e^2 \int_o^1 + \ldots + a_n e^n \int_o^1$$

Per modo che, dividendo ambo i membri dell' equazione risultante per $\rho!$, varrebbe l' equazione

$$(2) \qquad \frac{P_1}{\rho!} + \frac{P_2}{\rho!} = o.$$

Ora, tenendo conto dell' identità

$$\int_o^\infty z^\rho e^{-z} dz = \rho!,$$

il Hilbert dimostra che, qualunque sia ρ, il numero $\frac{P_1}{\rho!}$ è sempre intero e diverso da zero, mentre si può scegliere ρ in modo che $\frac{P_2}{\rho!}$ risulti in valore assoluto minore di 1; per modo che l' equazione (2) e quindi anche la (1) è impossibile; così resta stabilita la trascendenza del numero e.

Per passare da e a π si utilizza la relazione di Eulero $e^{i\pi} = -1$: supposto che $\alpha_1 = i\pi$ sia radice di un' equazione algebrica a coefficienti interi, che abbia le altre radici $\alpha_2, \ldots \alpha_n$, il prodotto

$$(1 + e^{\alpha_1})(1 + e^{\alpha_2})\ldots(1 + e^{\alpha_n}) = 1 + e^{\beta_1} + e^{\beta_3} + \ldots + e^{\beta_n}$$

dovrebbe esser nullo; ciò che il Hilbert dimostra impossibile, tenendo un procedimento analogo a quello già usato per il numero e.

Il Hurwitz mostrò come si potesse evitare, per dimostrare la trascendenza del numero e, la considerazione dell' integrale

$$\int_o^\infty z^\rho e^{-z}\, dz.$$

Egli parte dalla formola degli incrementi finiti

$$\varphi(x) - \varphi(o) = x \,.\, \varphi'\ (\vartheta x)\ \ (o < \vartheta < 1));$$

ed applica questa formola alla funzione

$$e^{-x}F(x) = \left\{ f(x) + f'(x) + \ldots f^{(r)}(x) \right\} e^{-x}$$

ove $f(x)$ è una funzione razionale intera di grado r della forma seguente

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!}\, x^{p-1} \left\{ (1-x)\,(2-x) \ldots (n-x) \right\}^p$$

essendo p un numero *primo*; così trova

$$F(x) - e^x F(o) = -\, x \,.\, e^{(1-\vartheta)x} \,.\, f(\vartheta x).$$

E ponendo in questa formola successivamente

$$x = 1,\ 2, \ldots n,$$

deduce le relazioni

$$\begin{cases} F(1) - eF(o) = \varepsilon_1, \\ F(2) - e^2 F(o) = \varepsilon_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{F}(n) - e^n F(o) = \varepsilon_n, \end{cases}$$

ove $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ sono quantità che col crescere di p tendono al limite zero, mentre $F(1), F(2) \ldots F(n)$ son sempre numeri interi divisibili per p, ed $F(o)$ è un numero intero non divisibile per p.

Supposto ora che e soddisfi all' equazione algebrica a coefficienti interi

$$C_o + C_1 e + \ldots + C_n e^n = o,$$

se ne dedurrebbe per le relazioni precedenti che l' espressione

$$C_1 F(1) + C_2 F(2) + \ldots + C_n F(n) + C_o F(o)$$

dovrebbe, per un valore conveniente di p, essere identicamente nulla, ciò che è impossibile, perchè essa rappresenta un numero intero non divisibile per p.

Infine il Gordan riuscì a stabilire la trascendenza di e e π utilizzando soltanto lo sviluppo in serie di e^x:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Indicando con c_r un numero intero indeterminato, ed usando il simbolo h^r per rappresentare il fattoriale $r!$, deduce dallo sviluppo precedente, mediante moltiplicazione per $c_r h^r$ la formola

$$c_r h^r e^x = c_r (x + h)^r + c_r x^r u_r,$$

ove u_r rappresenta la serie

$$u_r = \frac{x}{r+1} + \frac{x^2}{(r+1)\ (r+2)} + \ldots.$$

Se ξ indica il modulo di x, si ha

$$u_r = q_r\, e^{\xi},$$

ove q_r è una quantità di modulo minore dell' unità. Perciò, sommando membro a membro le formule analoghe alla precedente ottenute dando ad r gli $s+1$ valori $0, 1, 2, \ldots s$, si ricava la relazione

$$e^x \sum_{r=o}^{s} c_r h^r = \sum_{r=o}^{s} c_r (x + h)^r + e^{\xi} \sum_{r=o}^{s} c_r q_r x^r,$$

ossia, adottando le notazioni

$$\sum_{r=o}^{s} c_r x^r = \varphi(x), \quad \sum_{r=o}^{s} c_r q_r x^r = \psi(x),$$

si può scrivere più semplicemente

$$e^x . \varphi(h) = \varphi(x+h) + e^{\xi}\psi(x).$$

Da questa relazione, supponendo che e verifichi l'equazione algebrica a coefficienti interi

$$C_o + C_1 e + C_2 e^2 + \ldots + C_n e^n = o,$$

si ricava l'altra

$$O = \sum_{i=o}^{n} C^i \varphi(i+h) + \sum_{i=o}^{n} C_i \psi(i) e^i.$$

Ora scegliendo per polinomio $\varphi^{(x)}$ il seguente

$$\varphi^{(x)} = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} \{(1-x)(2-x)\ldots(n-x)\}^p,$$

ove p è un numero primo, il Gordan dimostra che, col crescere di p, la seconda somma della formola precedente tende al limite zero, mentre la prima si conserva sempre eguale ad un numero intero non divisibile per p e diverso da zero. Ne segue che l'ultima equazione non può esser verificata e perciò e è un numero trascendente. Analoghe considerazioni, tenuto conto della relazione $e^{i\pi} + 1 = o$, portano a stabilire la trascendenza del numero π, e, per via di successiva estensione, il teorema generale di Lindemann [1].

---

[1] Cfr., per uno sviluppo più dettagliato della dimostrazione del Gordan, il libro di Klein-Giudice, già citato. Pag. 51 e segg.

Date Due

5/31/93			

Library Bureau Cat. no. 1137

*THIS BOOK IS VERY FRAGILE AND MUST BE HANDLED WITH CARE.

*PLEASE XEROX CAREFULLY, USING THE EDGE COPIER.

*THIS BOOK IS FOR USE IN THE LIBRARY ONLY.

THANK YOU.

214576